

SÉRIE A. N° 169.

N° D'ORDRE

191

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Mention : SCIENCES

PAR

M. ANDRÉ LÉVÊQUE

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES

1^{re} THÈSE. — Les Lois de la transmission de chaleur par convection.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 30 Mars 1928, devant la Commission d'examen

MM. KOENIGS. *Président.*

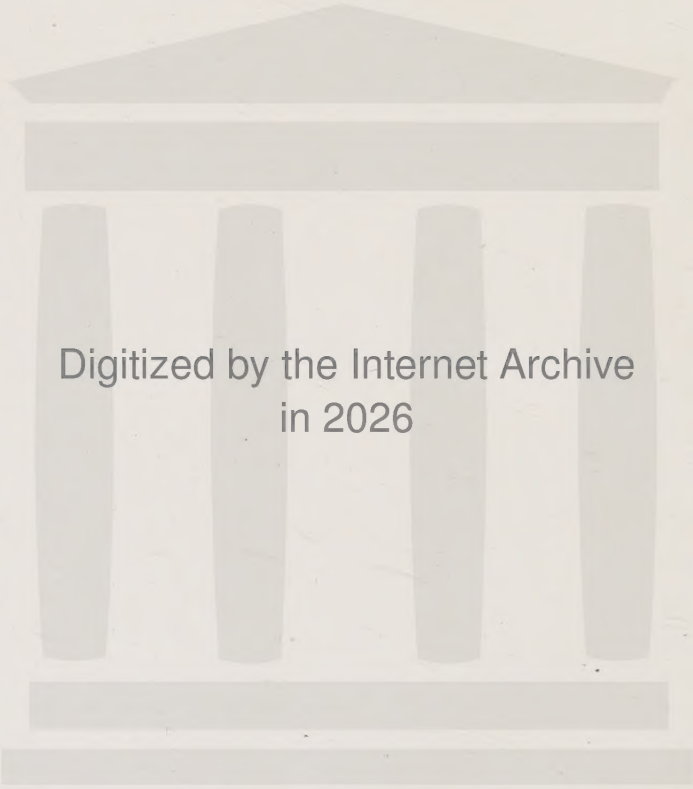
FABRY. } *Examineurs.*
VILLAT }

PARIS



92, RUE BONAPARTE (VI)

1928



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A. N° 169.

N° D'ORDRE

191

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Mention : SCIENCES

PAR

M. ANDRÉ LÉVÊQUE

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES

1^{re} THÈSE. — Les Lois de la transmission de chaleur par convection.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 30 Mars 1928, devant la Commission d'examen

MM. KOENIGS. *Président.*

FABRY.
VILLAT. } *Examineurs.*

PARIS



92, RUE BONAPARTE (VI)

1928

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen Ch. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.
Doyens honoraires . . . P. APPELL, M. MOLLIARD.

P. PUISEUX.
V. BOUSSINESQ.
A. JOANNIS.
H. LE CHATELIER.
H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
A. LEDUC.
G. SAGNAC.

Professeurs honoraires.

Emile PICARD Analyse supérieure et algèbre supér.
G. KOENIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLERANT Minéralogie.
H. ANDOYER Astronomie.
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et méc. céleste.
Gabriel BERTRAND Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Evolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ Chimie appliquée.
G. URBAIN Chimie minérale.
Emile BOREL Calcul des probabilités et Phys. mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
Rémy PERRIER Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM Physique.
M. MOLLIARD Physiologie végétale.
E. CARTAN Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des fonct. et théorie des transf.
A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY Physique.
Charles PÉREZ Zoologie.
Léon BERTRAND Géologie appliquée et géol. régionale.
R. LESPIEAU Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
É. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD Botanique.
P. MONTEL Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSQ Biologie maritime.
G. JULIA Mathématiques générales.
A. JOB Chimie générale.
A. MAILHE Etude des combustibles.
L. LUTAUD Géographie physique.
Eugène BLOCH Physique théorique et physique céleste.
Henri VILLAT Mécanique des fluides et applications.
N Géologie.

Professeurs



E. HÉROUARD Zoologie.
E. PÉCHARD Chimie (Enseig^t P. C. N.).
V. AUGER Chimie analytique.
M. GUICHARD Chimie minérale.
A. GUILLET Physique.
C. MAUGUIN Minéralogie.
L. BLARINGHEM Botanique.
A. MICHEL-LÉLY Pétrographie.
A. DERREINS Géologie.
R. DONGIER Physique du globe.
A. DENJOY Calcul différ. et intégral.
H. BÉNARD Physique (P. C. N.).

E. DARMOIS Physique.
G. BRUHAT Physique.
H. MOUTON Chimie physique.
L. JOLEAUD Paléontologie.
M. JAVILLIER Chimie biologique.
A. DUFOUR Physique (P. C. N.).
F. PICARD Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY Zoologie.
L. DUNOYER Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE Radioactivité.

Secrétaire Daniel TOMBECK.

LES LOIS DE LA TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONVECTION

INTRODUCTION.

L'étude ci-dessous a pour but de présenter l'état actuel de nos connaissances relatives aux lois si complexes de la transmission de la chaleur entre un fluide et une paroi, par le simple jeu des phénomènes de conductibilité et de convection.

Nous avons cherché, d'une part, à utiliser les travaux théoriques si intéressants de Boussinesq, laissés dans l'oubli, et bien à tort, par la plupart des expérimentateurs étrangers; d'autre part, à exposer les travaux théoriques des auteurs allemands, qui se résument presque uniquement à des considérations d'homogénéité. Nous avons traité de façon aussi complète que possible les problèmes simples résolubles avec les moyens ordinaires de l'analyse. Nous avons cherché ensuite à rapprocher et comparer les travaux des divers expérimentateurs, et à expliquer les divergences constatées au moyen d'une formule binôme nouvelle tirée de considérations théoriques. Enfin, nous avons tenté de bien situer la position des principaux problèmes qui se posent actuellement, afin de tracer les voies de nouvelles recherches expérimentales.

CHAPITRE I.

IMPORTANCE PRATIQUE DE LA CONNAISSANCE
DES LOIS DE LA TRANSMISSION DE CHALEUR
PAR CONVECTION.
SÉPARATION DU RAYONNEMENT.

L'intérêt pratique de la transmission de chaleur par convection est considérable : on peut dire que le problème intéresse toutes les industries qui utilisent l'action de la chaleur. La chaleur d'un foyer se transmet toujours simultanément par convection et par rayonnement (chaudières, fours industriels de tous les types), soit aux chaudières, soit aux pièces à chauffer. Les échangeurs de températures (économiseurs, réchauffeurs d'eau, réchauffeurs d'air, récupérateurs, cowpers, etc...) fonctionnent exclusivement, ou presque exclusivement, par convection. Dans les condenseurs, il en est de même. Enfin tous les problèmes de chauffage, de réfrigération, de séchage, d'évaporation, etc..., l'étude des pertes extérieures par refroidissement des moteurs, des appareils divers, des locaux, etc... ; nécessitent la connaissance des lois de la transmission de chaleur par convection. En fait les appareils industriels comportent souvent un échange de chaleur entre deux fluides à travers une paroi. Le transport de chaleur comporte alors trois stades : pour une chaudière par exemple, la chaleur passe des gaz brûlés à la paroi extérieure des tubes par convection, et de la grille, de la maçonnerie, des particules incandescentes et des gaz absorbants à cette même paroi, par rayonnement. Toute cette chaleur absorbée traverse l'épaisseur de la tôle suivant les lois de la conductibilité ;

elle se transmet enfin de la paroi intérieure à l'eau par simple convection.

Réunir à l'aide d'une formule globale élémentaire le résultat de ce triple parcours, est absolument irréalisable; parce que les lois du rayonnement et de la convection sont tout à fait différentes. Le rayonnement de la chaleur agit à distance, entre deux surfaces, suivant la loi de Stéfán, du moins pour les corps noirs (proportionnalité à la quatrième puissance de la température absolue), et indépendamment des fluides interposés (quand ils ne sont pas notablement absorbants). La convection de la chaleur s'opère par contact; c'est en réalité de la conductibilité dans un fluide en mouvement; elle suit les lois de la conductibilité, compliquées par les transports de chaleur dus aux molécules qui se déplacent.

A travers un fluide non absorbant et par suite non émissif, l'air par exemple, le rayonnement se transmet donc comme dans le vide. Par ailleurs ce fluide est le siège d'une transmission de chaleur par conductibilité et convection, exactement comme si ce rayonnement n'existait pas. La chaleur qui traverse les parois est alors la somme de deux termes indépendants l'un de l'autre, obéissant à des lois toutes différentes, et qu'on doit par suite étudier séparément. Le cas du fluide absorbant (eau, gaz contenant de la vapeur d'eau, CO_2 , CO , carbures d'hydrogène, etc...) est plus compliqué, car chaque molécule fluide absorbe et émet simultanément de la chaleur par rayonnement; le rayonnement agit alors sur la répartition des températures dans le fluide, ainsi que sur son mouvement, et par suite sur la quantité de chaleur transmise par conductibilité et convection. Dans ce cas, la simple addition des quantités de chaleur calculées en supposant successivement le rayonnement et la convection comme opérant seuls, ne donne plus le chiffre exact des échanges avec les parois.

En fait, on pourra, dans presque tous les cas, séparer de façon complète les deux problèmes du rayonnement et de la convection à travers un fluide, en raison de son faible pouvoir absorbant (c'est-à-dire, soit en raison de sa faible épaisseur, soit à cause de la faible largeur des raies du spectre d'absorption dans la gamme des radiations).

Dans ce qui suivra, nous ferons donc toujours abstraction du rayonnement, soit qu'il ne se manifeste pas de façon sensible (exemple : circulation d'un fluide non absorbant à l'intérieur d'un tube à température uniforme), soit qu'il soit complètement séparable de la convection (fluide non absorbant) de la façon que nous venons de définir.

Expérimentalement, cette séparation sera facile à faire quand on pourra calculer ou mesurer directement le rayonnement. Dans les autres cas, on profitera de ce que les lois sont différentes, en faisant varier les conditions d'expériences et en écrivant le système d'équations ainsi obtenu. L'effet de la convection s'évaluera donc finalement par différence entre une quantité directement mesurée et une quantité relativement facile à calculer de façon approximative. Il ne faut pas oublier que l'émission des corps réels ne suit pas exactement la loi de Stefan, et que l'expérimentation comporte de grosses difficultés et de nombreuses causes d'erreurs systématiques.

Les expériences sur la transmission de la chaleur sont, en effet, particulièrement délicates. D'une part, il faut mesurer des quantités de chaleur, directement au calorimètre, ou indirectement par des mesures de débits et de températures. D'autre part, il faut évaluer les températures aux parois et en divers points du fluide ; c'est surtout dans ce dernier cas que les erreurs systématiques s'introduisent. Il faut assurer pendant toute la durée de l'expérience un régime permanent de vitesses, de pres-

sions et de températures en tous les points. Ajoutons à cela que la détermination des coefficients de transmission exige ensuite la connaissance des chaleurs spécifiques et des coefficients de conductibilité et de leur variation avec la température (connaissance souvent imparfaite). Enfin des éléments mal connus ou difficiles à mesurer interviennent (degré d'agitation du fluide, rugosité de la paroi, etc...).

Pour arriver à des formules expérimentales simples, il faut encore définir des températures moyennes, des coefficients moyens de transmission, des valeurs moyennes des constantes physiques, etc...

Il n'y a dès lors rien d'étonnant à ce qu'on ne soit pas encore arrivé, sauf dans quelques cas particuliers et dans des limites restreintes, par exemple (circulation d'un fluide dans un cylindre) à établir les formules suffisamment approchées pour les besoins de la pratique, et qu'on se contente le plus souvent de formules plus ou moins grossières, faute de mieux, ou bien de règles empiriques ne convenant que pour des cas parfaitement définis et ne permettant aucune modification, aucun progrès, si ce n'est par tâtonnements ?

CHAPITRE II.

HISTORIQUE DES RECHERCHES EFFECTUÉES
JUSQU'A CE JOUR.

La loi la plus ancienne est celle de Newton, qui, étudiant le refroidissement d'un corps chaud dans une enceinte, sans faire la distinction entre le rayonnement et la convection, a trouvé que la quantité de chaleur transmise était proportionnelle à la surface du corps S , au temps θ , et à la différence de température entre la surface du corps et l'enceinte :

$$Q = A \cdot S (t_1 - t_0) \theta.$$

Cette formule n'est applicable que pour des différences de température inférieures à 25° .

Dulong et Petit en 1837 séparèrent le rayonnement et la convection et étudièrent *les lois du refroidissement dans une enceinte gazeuse au repos*; ils en déduisirent simultanément les lois du rayonnement et celles de la convection. Leur formule de rayonnement, de forme exponentielle, fut reconnue plus tard inexacte et remplacée par celle de Stefan. La quantité de chaleur par convection a été mise par Dulong et Petit sous la forme

$$Q_c = Bh^c (t_1 - t_0)^{1,233} \cdot \theta \cdot S.$$

h étant la pression du gaz ambiant, et B une constante, qui dépend de la nature du gaz et de la forme de la surface; c étant voisin de 0,5 et variable avec la nature du gaz. Cette formule est intéressante, car elle se rapproche beaucoup des formules les plus récentes, quoiqu'elle n'ait été vérifiée que pour des différences de températures inférieures à 360° .

Péclet a complété ces travaux en déterminant les valeurs de B pour l'air, avec diverses formes de surfaces (voir pour les travaux de Dulong et Petit et de Péclet le *Traité de physique industrielle* de L. Ser, 1888). Il avait pris dans ses expériences les plus grandes précautions pour empêcher les mouvements anormaux de l'air ambiant, et avait observé que ces mouvements avaient une grande influence sur la valeur des coefficients de convection.

Ser, dans son remarquable traité, a repris la formule de Dulong-Péclet et proposé d'écrire pour la chaleur transmise par convection dans une enceinte au repos à la pression atmosphérique :

$$Q = \alpha S (t_1 - t_0), \quad \text{avec} \quad \alpha = 0,552 \cdot f \cdot (t_1 - t_0)^{0.223},$$

f étant le coefficient de Péclet.

α est le coefficient de convection : il n'est pas constant, mais varie avec les températures et la forme des surfaces.

Jusqu'ici il ne s'agissait que du problème dit du refroidissement, le fluide étant dépourvu de mouvement d'ensemble. On aborda alors le problème le plus simple comportant un mouvement d'ensemble du fluide, c'est-à-dire la convection dans un tube rectiligne.

Terminons d'abord l'énumération des recherches sur les lois de la convection dans un fluide sans mouvement d'ensemble. De Laprovostaye et Desains reconnurent que les lois du réchauffement étaient les mêmes que celles du refroidissement, pour les pressions ordinaires (1846); Boussinesq, dans son *Cours de physique mathématique*, t. II, 1903, a repris le problème de Dulong et Petit et expliqué leur formule par des considérations théoriques d'homogénéité, dans le cas d'une sphère ou d'un cylindre peu allongé.

Kennelly, Wright et Bylevelt en 1909, Langmuir

en 1912, Bylevelt en 1915 ont étudié le refroidissement des fils métalliques dans l'air; Wamsler (1914) opéra sur des tuyaux de vapeur: Nüsselt (1915), utilisant l'homogénéité, donna pour le coefficient α une formule comportant une fonction à déterminer par l'expérience. Groeber dans son ouvrage de 1921, *Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges*, a fait le rapprochement de cette formule avec les travaux des expérimentateurs précédents. Petavel (1915-1916) étudia le refroidissement libre de tuyaux de fumée dans l'air, à des pressions variables, et d'un fil métallique dans l'air, l'oxygène et l'hydrogène.

Davis (1922) expérimenta le refroidissement d'un fil de platine dans divers liquides et dans l'air, vérifia la formule d'homogénéité de Nüsselt pour les fluides visqueux, et étudia l'influence de la température du liquide. Enfin, Nüsselt a étudié le refroidissement des gaz dans les moteurs à explosion (1925) et donné une formule dérivée des considérations d'homogénéité. Avant lui un certain nombre d'auteurs avaient donné dans ce cas des expressions purement empiriques (Meyer, Wach, Weishaar, Neumann, etc...).

Les recherches les plus anciennes sur le *coefficient de convection α entre une paroi et un fluide animé d'un mouvement d'ensemble* sont celles de Joule. Primitivement, α était considéré comme une constante dépendant seulement de la nature du fluide et de l'état physique de la paroi. Mais on s'aperçut bien vite que c'était complètement faux. On songea alors que ce coefficient devait dépendre de la vitesse du fluide et être de la forme :

$$\alpha = \alpha_0 + BV^n,$$

Joule fit des expériences en 1861 pour déterminer le coefficient de transmission entre paroi et eau; il trouva que α croissait moins vite que la vitesse. Nicol et Hage-

mann firent des essais analogues. Ser étudia la convection par l'air à l'intérieur de tubes de faible diamètre, et trouva que α croissait proportionnellement à une puissance de la vitesse comprise entre 1 et $1/2$, l'exposant diminuant quand le diamètre augmente. Dans une deuxième série d'expériences, en faisant circuler l'air autour de tuyaux de plus forte dimension, il vérifia la proportionnalité approchée de α à $\sqrt{V}$. Enfin il mesura le coefficient de convection pour l'eau, qu'il trouva beaucoup plus élevé que pour l'air, et plus grand que celui qui résulte des expériences de Joule, tout en reconnaissant la faible précision de ces résultats (1888). On doit aussi à Ser l'étude théorique simple des échanges de chaleur entre deux fluides en mouvement à travers une paroi; cette étude est devenue classique (circulation de même sens, et circulation en sens contraires, dite méthodique); elle est basée sur les hypothèses de la constance du coefficient de convection sur toute la surface d'échange et de l'uniformité de la température des deux fluides dans une section normale à la vitesse.

Reynolds, dès 1874, par des considérations théoriques, montra l'influence de la vitesse V et de la masse spécifique ρ du gaz; se basant sur la théorie cinétique, il écrivit :

$$\alpha = A \cdot \rho \cdot V;$$

Mais ses travaux ne furent sortis de l'oubli qu'en 1897 par Stanton qui, partant de la formule de Reynolds relative à l'écoulement des fluides visqueux dans un tube, parvint, par un raisonnement approché, à la formule :

$$\alpha = B \left(\frac{\eta}{D} \right)^{4-n} (\rho V)^n \quad \text{avec :} \quad 0 < n < 1,$$

η étant le coefficient de viscosité, D le diamètre du tube, et B variant avec les températures.

A peu près à la même époque, plusieurs formules empiriques firent leur apparition. En Allemagne, la formule de Mollier :

$$\alpha = A + B \sqrt{V},$$

et en Angleterre la formule de Bell :

$$\alpha = A + BV,$$

dont on déterminait expérimentalement les coefficients A et B par des essais sur les tubes à fumée ou sur les économiseurs ; à chaque valeur pratique du diamètre du tube correspondait un couple de valeurs pour A et B. Les coefficients variaient aussi avec la disposition du faisceau tubulaire.

Pour les chaudières à vapeur, les anglais et les américains ont adopté la formule donnée par Rankine en 1873 :

$$Q = \frac{1}{a} (t_1 - t_0)^2,$$

a étant déterminé expérimentalement pour chaque type d'appareil. D'autres formules empiriques, tout aussi imprécises et dépourvues de toute portée théorique, ont encore été proposées, sur lesquelles nous n'insisterons pas.

En 1896, Carcanagues, ingénieur des mines, procéda à la Compagnie P.-L.-M. à des expériences en vue de rechercher l'échauffement de l'air parcourant un tuyau maintenu extérieurement à une température déterminée (*Annales des Mines*, 9^e série, t. IX, 1896). Les résultats des expériences sont assez divergents, en raison de la faible précision des mesures.

Boussinesq, en 1903, a publié dans sa *Théorie analytique de la chaleur* une étude fort intéressante. Partant des équations générales de la thermodynamique dans un fluide en mouvement, établies par Duhem, il a examiné le

cas du fluide indéfini animé d'un mouvement d'ensemble autour d'un solide au repos, avec potentiel de vitesses, et est parvenu à une formule très générale :

$$\alpha = C^{te} \times \sqrt{\frac{Kc_p V}{L}},$$

où :

- K est le coefficient de conductibilité du fluide ;
- c, sa chaleur spécifique par unité de masse ;
- ρ , sa masse spécifique ;
- L, une dimension du solide ;
- V, la vitesse d'ensemble du fluide à distance du solide.

Il a calculé la valeur de la constante dans divers cas et indiqué la marche à suivre dans le cas général. Cette formule est intéressante dans la pratique, puisqu'elle s'applique en première approximation aux tubes d'eau des chaudières léchés par les gaz chauds.

En 1909, les recherches sur la convection à l'intérieur d'un tube reprenaient avec Josse, Jordan, Nüsselt et Nicholson.

Josse, opérant avec des condenseurs à surface, déterminait le coefficient de convection α dans les tubes d'eau. Les résultats obtenus se rapprochent de ceux de Ser, mais il a observé que α croissait beaucoup avec la turbulence de l'eau. Il a également mesuré α pour l'air circulant dans un tuyau chauffé extérieurement à la vapeur.

Jordan a fait des séries de mesures assez complètes avec des tubes de différents diamètres et en a tiré pour α une formule inspirée de travaux de Reynolds :

$$\alpha = A + B\epsilon V,$$

B variant linéairement avec le diamètre et avec la température moyenne, et A étant une constante.

Dans cette formule et les suivantes, V désigne une

valeur moyenne de la vitesse, calculée d'après le débit du fluide.

Nicholson, en 1909, parvint à une formule analogue à celle de Jordan, où A et B sont fonctions de la température moyenne, et où B dépend aussi du diamètre D.

Nusselt a fait, en 1909, des expériences assez précises avec un tube unique ; en se guidant sur des considérations d'homogénéité, il a obtenu la formule :

$$\alpha = 13,90 \frac{K_0}{D} \left(\frac{\rho c V D}{K} \right)^{0,786}.$$

K_0 étant la valeur du coefficient de conductibilité prise à la paroi, K la valeur moyenne de ce même coefficient ; α , ainsi que toutes les grandeurs de la formule, étant exprimé en *unités pratiques* (mètres, heures, kilogrammes-masse, degrés centigrade, calories-kgr), exception faite de V, exprimé en mètres par seconde (et non par heure).

Dans une étude d'ensemble parue dans la *Revue de Mécanique* de 1911, M. l'inspecteur général des mines Leprince-Ringuet a repris les travaux expérimentaux de Carcanagues, Henry, Nüsselt et surtout Jordan et, après une discussion serrée, est parvenu à rassembler tous ces résultats dans une même formule :

$$\alpha = \frac{51,3}{L^p} \cdot [0,0595 (1 + 0,00215\tau) \rho V]^n,$$

L étant la longueur d'un tube, avec $p = 0,13$ environ ; τ , la température moyenne du fluide ;

n , décroissant de 1 à 1/2, quand D augmente, et représenté approximativement par la formule :

$$n = \frac{1 + 18D}{1 + 36D} \quad (D \text{ en mètres}).$$

Soennecken, en 1910, expérimentant avec de l'eau non

bouillante à l'intérieur de tubes de fer ou de laiton, trouva :

$$\alpha = A \frac{V^n}{D^{1-n}} (1 + 0,014t),$$

avec une influence marquée de la rugosité de la paroi, A et n diminuant quand cette rugosité augmente :

Ainsi, avec le tube de laiton :

$$A = 2.420 \quad \text{et} \quad n = 0,9;$$

avec le tube de fer :

$$A = 735 \quad \text{et} \quad n = 0,7.$$

Rietschel, en 1910, publia une formule analogue aux précédentes pour l'air :

$$\alpha = 3,145 \frac{(2V)^{0,79}}{D^{0,16}}.$$

mais qui proposait pour D un exposant nettement différent de $1 - n = 0,21$, après des essais systématiques avec des tubes de diamètres différents, dans des réchauffeurs d'air tubulaires.

Rietschel étudia également la transmission de chaleur des gaz chauds aux tubes d'eau des chaudières; avec des tubes de 33 millimètres écartés de 5 millimètres il a trouvé (V variant de 0^m,50 à 20 mètres) pour le coefficient moyen de convection :

$$\alpha = A (2V)^n;$$

avec :

$$n = 0,59 \text{ et } A = 15,8 \text{ pour 2 rangées de tubes;}$$

$$A = 16,9 \text{ pour 3 rangées;}$$

$$A = 18,1 \text{ pour 4 rangées;}$$

V étant mesuré au passage le plus étroit. Malheureu-

sement, il n'a pas fait varier D , ni l'espacement des tubes.

Thoma a trouvé pour le même problème (Hochleistungskessel, 1921):

$$\alpha = \frac{AV^{0.6}}{D^x}, \quad (V \text{ m/sec et } D \text{ cm.}),$$

avec

$$\begin{array}{ll} A = 43,5; & x = 0,4 \text{ pour des tubes en quinconce;} \\ A = 36,5; & x = 0,5 \quad \text{—} \quad \text{en ligne;} \end{array}$$

V étant la vitesse normale aux tubes mesurés avant le passage des gaz. Cette formule se rapproche beaucoup de celle de Boussinesq.

Le refroidissement des fils métalliques dans un courant gazeux a été étudié, en 1909 par Kennelly, en 1912 par Morris, et en 1914 par King. Ce dernier a mis ses résultats sous la forme :

$$\alpha D = B \sqrt{VD} + C,$$

B et C étant des constantes qui dépendent un peu de l'écart de température et du diamètre D .

Compan (1902), Hughes et Carpenter, cités par Davis, ont expérimenté le refroidissement des cylindres et des sphères. Compan a vérifié les lois de Boussinesq, et Hughes donne :

$$\alpha D = A \cdot D^{0.57} V^n,$$

avec $n = 0,55$ à $0,70$, variable avec le diamètre.

Russell (1910) préconise une formule presque identique à celle de Boussinesq.

Dans l'ensemble, ces travaux vérifient la théorie de M. Boussinesq.

La transmission de chaleur de la vapeur d'eau surchauffée circulant dans un tube a été étudiée expérimentale-

ment par Poensgen en 1916; la formule à laquelle il est parvenu est la suivante;

$$\alpha = 3,29 \frac{p^{1,082} \cdot V^{0,892}}{D^{0,4643} \cdot 40^{0,0047} \cdot t_0},$$

p étant la pression en kilogrammes par centimètre carré, et t_0 la température de la paroi.

Postérieurement à 1909, Nusselt a publié de nombreux articles sur la question. Il fit d'abord une étude théorique incomplète du coefficient α dans un tube parcouru par un fluide animé du mouvement de Poiseuille, la vitesse étant inférieure à la vitesse critique de Reynolds (1910). Puis il fut amené progressivement à perfectionner sa formule primitive en remplaçant K_0 par K , en modifiant l'exposant de D (d'après Rietschel), et en introduisant la longueur L du tube (1913 à 1917). Il étudia aussi le problème spécial des condenseurs de vapeur par surface (1916), concurremment avec Parr (1921).

Groeber, en 1921, réunissant les théories de Nusselt et ses propres essais de 1912, fit un exposé théorique d'ensemble, en concluant à une formule à peu près identique à la dernière formule de Nusselt :

$$\alpha = 22,5 \cdot \frac{K}{D} \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{0,05} \left(\frac{c_p V D}{K}\right)^{0,79},$$

et qui semble, dans les limites des expériences de Nusselt, la plus exacte.

Citons, pour finir cette longue énumération, les essais de M. V. Kammerer (1920) sur une chaudière Stierle ambitulaire avec surchauffeur et économiseur.

Nous reviendrons sur les principaux travaux ci-dessus, afin de les comparer et de tenter, par leur rapprochement entre eux et avec la théorie, l'unification des résultats qui, on le voit, semblent plutôt un peu disparates et contradictoires. Ceci nous rappelle également que le pro-

blème présente de réelles difficultés et qu'il est loin d'être complètement résolu.

D'une part, la théorie de Reynolds, conduisant à la proportionnalité de α à la vitesse, est controuvée par l'expérience. D'autre part, les travaux de Boussinesq ont été bien à tort laissés dans l'ombre ; enfin Nüsselt a eu le mérite d'introduire les considérations d'homogénéité. Mais on peut se demander dès maintenant si une formule monôme est capable de représenter le coefficient de convection, et si ces considérations n'ont pas tout simplement mené les chercheurs à une impasse par suite d'une hypothèse fausse.

Nous allons montrer, dans ce qui va suivre, que la dernière formule en date, qu'on peut appeler formule de Groeber-Nüsselt, ne saurait s'appliquer hors des limites où elle a été établie.

Signalons encore que le problème de transmission de chaleur à la surface extérieure des tubes d'eau des chaudières a été très peu étudié expérimentalement, quoiqu'il soit au moins aussi important au point de vue pratique que le problème des tubes de fumée.

Quant au problème du refroidissement, il n'a été traité que dans des cas particuliers (cylindre horizontal, sphère, corps se rapprochant d'une sphère) ; mais les formules concordent à peu près. Enfin, le problème des condenseurs par surface n'est pas encore élucidé complètement.

CHAPITRE III.

POSITION THÉORIQUE DU PROBLÈME.

Le problème, dans toute sa généralité, peut se poser de la façon suivante :

Un fluide non absorbant est en mouvement au contact de plusieurs parois. Déterminer à chaque instant et en chaque point les vitesses, les températures, les pressions, les densités, et calculer les échanges de chaleur en chaque point des parois, en faisant abstraction des phénomènes de rayonnement.

C'est un problème de dynamique des fluides, compliqué de transmission de chaleur par conductibilité.

Supposons pour simplifier qu'il n'y a pas de changement d'état au sein du fluide, ce qui écarte le cas d'une vapeur condensante, et par suite le problème des condenseurs par surface ; écartons également les réactions chimiques et les combustions.

Les équations seront alors les suivantes :

Équation de continuité ;

Équations du mouvement ;

Équation caractéristique du fluide ;

Équation de la chaleur.

On y joindra : les conditions initiales ; les conditions aux limites (sur les parois).

Établissons l'équation de la chaleur. Partons de la loi fondamentale de la conductibilité :

$$(1) \quad \frac{dQ}{dt} = -K \cdot \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dS,$$

n représentant la normale à l'élément de surface dS ; K , le coefficient de conductibilité, et dQ , le flux de chaleur pendant le temps $d\theta$.

Il s'ensuit immédiatement que, dans un volume élémentaire du fluide, le flux total de chaleur dq qui entre est :

$$dq = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] dx dy dz d\theta;$$

ou bien, en rapportant dQ à l'unité de masse :

$$(2) \quad dQ = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] \frac{1}{\rho} d\theta.$$

Remplaçons dQ par sa valeur dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$(3) \quad dU = JdQ - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + d\mathfrak{E}_r,$$

U étant l'énergie interne, et $d\mathfrak{E}_r$ le travail intérieur des forces de viscosité dissipé en chaleur, rapportés à l'unité de masse ;

$$\begin{aligned} d\mathfrak{E}_r &= \frac{\eta}{\rho} d\theta \times \text{fonction dissipatrice de lord Rayleigh,} \\ &= \frac{\eta}{\rho} d\theta \times \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Cette fonction dissipatrice est une combinaison compliquée et du second degré des dérivées partielles des vitesses par rapport aux coordonnées.

Remplaçant dans l'équation (3), U , dQ , et $d\mathfrak{E}_r$ par leurs valeurs, on aura l'équation cherchée, à laquelle il

faudra joindre les équations classiques des fluides visqueux :

$$(4) \quad f(p, \rho, T) = 0.$$

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0.$$

$$(6) \quad \begin{cases} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \eta_1 \Delta_2 u - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \eta_1 \Delta_2 v - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \eta_1 \Delta_2 w - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Telles sont les équations générales, (2) à (6), pour un fluide de coefficient de viscosité: η ; X, Y, Z sont les composantes de la force, rapportées à l'unité de masse en chaque point.

Plusieurs simplifications s'imposent pour arriver à des équations maniables. D'abord, nous supposons qu'on peut prendre pour K une constante, quoiqu'en réalité K soit une fonction de la température. Quant au travail intérieur $d\mathcal{E}_\eta$ des forces de viscosité, nous le négligeons, ce qui est tout à fait légitime pour les gaz et même pour l'eau, en raison des faibles valeurs de η . Nous utiliserons également les simplifications courantes légitimes en aérodynamique, c'est-à-dire que nous considérerons le fluide comme un fluide incompressible où ρ est uniquement fonction de la température.

Nous écrirons :

$$d \left(U + \frac{p}{\rho} \right) = J c_p dt,$$

en introduisant la chaleur spécifique c_p à pression constante. Cette relation est applicable non seulement aux gaz parfaits, mais encore à tous les fluides, pourvu que l'on

puisse supposer p sensiblement constant. L'équation (3) devient alors :

$$c\rho \frac{dt}{d\theta} = K\Delta_2 t - \frac{1}{\lambda} \frac{dp}{d\theta}.$$

Il s'agit ici de dérivées totales prises en suivant la particule fluide dans son trajet :

$$\frac{dt}{d\theta} = u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \theta}; \quad \text{de même pour } \frac{dp}{d\theta}.$$

Le travail de compression $\frac{1}{J} \frac{dp}{d\theta}$ est négligeable en face des échanges de chaleur. Finalement, l'équation de la chaleur devient, en remplaçant c_p par c et en posant $a^2 = \frac{K}{c\rho}$:

$$(3') \quad \frac{dt}{d\theta} = a^2 \Delta_2 t;$$

c'est la même équation que pour les solides isotropes.

Nous supposons encore que le temps n'intervient pas dans les équations, c'est-à-dire que le régime des vitesses, des pressions et des températures est permanent.

Enfin, dans le cas d'un mouvement d'ensemble du fluide, nous pourrions admettre, si la vitesse est suffisante, que ρ est une constante, écrire l'équation d'incompressibilité

$$(5') \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

remplaçant l'équation (5) ; et négliger les composantes X, Y, Z de la pesanteur.

Mais, pour l'étude du refroidissement d'un solide au repos plongé dans un fluide dépourvu de mouvement d'ensemble, nous ne pourrions plus négliger les variations de ρ , ni les composantes de g , car ce sont ces variations

qui produisent les petits mouvements de convection observés au voisinage de la surface du corps ; ces petits mouvements sont en effet dus à l'existence de la pesanteur ; ils sont produits par de véritables poussées d'Archimède, s'exerçant sur des particules plus chaudes (et partant moins denses) plongées dans un milieu moins chaud, c'est-à-dire plus dense. Un liquide incompressible où ρ serait indépendant de la température ne donnerait lieu à aucun mouvement de convection, dû aux différences de température, et le problème se réduirait à un problème de conductibilité dans un corps au repos.

Autrement dit, le problème du refroidissement ne permet pas de scinder en deux la difficulté, car les différences de température sont les causes du mouvement. Au contraire, *dans le cas d'un mouvement d'ensemble du fluide le long d'une paroi, on voit que les hypothèses simplificatrices ont pour effet de permettre la résolution en deux stades :*

1° *Le problème d'hydrodynamique ordinaire ;*

2° *Le problème de la transmission de chaleur.*

On détermine les vitesses en chaque point comme s'il n'y avait point d'échanges calorifiques ; puis on résout l'équation (3) de la chaleur, ou :

$$(3'') \quad \frac{dt}{dt} = u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} = a^2 \Delta_2 t,$$

en régime permanent.

En fait, à notre connaissance, seul Boussinesq a abordé le problème théorique du refroidissement, et encore dans le cas le plus simple que l'on puisse imaginer : c'est celui d'un plateau vertical infiniment mince. Il a montré qu'on aboutit à une équation compliquée et irréductible du quatrième ordre, dont la résolution dépasse les possibilités de l'analyse mathématique. Au contraire, l'autre problème peut se résoudre dans un certain nombre de cas

particuliers Boussinesq en a traité quelques-uns ; nous en parlerons dans ce qui va suivre. Nous en résoudrons quelques autres un peu plus complexes.

Pour la résolution de ces deux problèmes bien distincts mais tous deux très compliqués au point de vue théorique, comme à l'expérimentation, les considérations approximatives doivent guider les chercheurs. Elles sont de deux sortes :

1° On établit *à priori* une formule pour le coefficient de convection en se basant sur l'homogénéité des équations ;

2° On résout des problèmes grâce à des hypothèses assez simples, mais qui se rapprochent le plus possible de la réalité. On obtient ainsi, pour α , des valeurs que l'on peut essayer de corriger en tenant compte de l'expérience.

Nous avons vu que Nusselt s'est engagé surtout dans la première voie ; il a également traité un problème théorique, mais, comme nous le verrons plus loin, sans en tirer les conséquences les plus intéressantes qu'il comportait.

Boussinesq s'est placé au premier point de vue pour le problème du refroidissement, faute de pouvoir faire mieux ; avec l'autre problème, il a résolu des cas fort intéressants pour la pratique.

Les considérations d'homogénéité ont l'avantage de la simplicité ; elles surmontent aisément les difficultés. La méthode générale employée est la suivante : le coefficient α cherché dépend naturellement des paramètres qui figurent dans les équations telles que nous les avons écrites plus haut. Mais, si on examine de plus près ces équations, on voit que ces paramètres, qui sont des constantes physiques, se groupent avec les variables (vitesses, dimensions, températures, etc...) de façon à former des invariants de similitude, dépourvus de dimensions. Ces invariants conservent toujours la même valeur quel que soit le système cohérent d'unités employé. Corrélative-

ment, si on considère deux problèmes semblables du régime permanent, leur ensemble sera caractérisé par une même valeur pour chacun de ces invariants aux points homologues; inversement, si on se donne les valeurs de ces invariants, elles définiront une infinité de problèmes semblables où le nouvel invariant $\frac{\alpha L}{K}$ aura toujours la même

valeur en chaque point de la surface d'échange (K , coefficient de conductibilité du fluide; L , dimension principale). Nous appelons problèmes semblables deux problèmes de transmission de chaleur à l'état permanent où dans les champs correspondants les longueurs sont proportionnelles, ainsi que les vitesses, les variations de pression (la pression n'intervenant dans les équations que par ses dérivées), les masses spécifiques, les chaleurs spécifiques, les coefficients de conductibilité, les coefficients de viscosité, les différences de température. etc..., aux points homologues; les coefficients de proportionnalité n'étant pas les mêmes pour les grandeurs de nature différente, mais vérifiant les relations nécessaires fournies par ces équations et par les conditions initiales et aux limites.

Ces relations ne sont autres que celles qui expriment la fixité des invariants.

En définitive, les considérations d'homogénéité nous donneront en chaque point de la surface d'échange :

$$(7) \quad \frac{\alpha L}{K} = \text{fonction de } (A_1, A_2, \dots, A_n),$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ étant les n invariants des équations.

En fait, cela diminue considérablement le nombre des variables à expérimenter, et allège singulièrement la tâche des chercheurs (n étant très faible, 2 ou 3 le plus souvent).

Un point faible de cette méthode est que, pour obtenir

l'expression de α , il faut définir les valeurs moyennes des diverses grandeurs entrant dans les invariants, car toutes les constantes physiques varient notablement. Nüsselt en a donné des définitions arbitraires. Rien n'empêche d'en prendre d'autres ; le raisonnement ci-dessus est impuissant à préciser ce point. C'est surtout pour α que le choix d'une valeur moyenne devient difficile ; nous verrons que α varie beaucoup sur la surface dans tous les cas. Sa valeur moyenne théorique est facile à définir ; mais, pour la déterminer, il faut avoir résolu le problème. Autrement dit, les expériences donneront directement la valeur moyenne de α , avec certaines précautions ; mais on ne pourra pas en déduire sa valeur en chaque point de la surface de transmission. Or, la formule (7) ci-dessus ne s'applique exactement qu'aux valeurs vraies des diverses grandeurs au point considéré.

Nüsselt a du reste été visiblement embarrassé par ce qui précède, puisque, dans sa première formule relative au problème à l'intérieur d'un tube, il fait entrer deux valeurs de K , la valeur moyenne dans le fluide (qu'il définit avec précision), et sa valeur à la paroi, cette dernière intervenant dans l'invariant $\frac{\alpha L}{K}$. Il a reconnu ensuite que ce compromis était bâtard, et il a proposé de prendre partout des valeurs moyennes dans la formule (7).

Pour simplifier encore, il a supposé que la fonction inconnue était de la forme monôme, comme cela arrive souvent dans les lois physiques simples. Cette hypothèse supplémentaire est purement gratuite, et uniquement destinée à faciliter les calculs pratiques.

Bref, les considérations de Nüsselt soulèvent d'abord deux difficultés : d'une part, le choix de grandeurs physiques moyennes, d'autre part la légitimité de la formule monôme. La première peut encore se résoudre approximativement, quoiqu'avec un certain arbitraire, mais la

seconde est beaucoup plus grave, car elle restreint singulièrement le champ des investigations.

Il y a encore une autre difficulté : dans le cas d'un mouvement turbulent, c'est-à-dire tourbillonnaire, les lois de similitude ne s'appliquent en toute rigueur qu'aux vitesses moyennes locales, et non aux oscillations irrégulières de ces vitesses, qui ne constituent pas tout à fait un régime permanent. Or, les tourbillons ont une influence considérable sur les échanges de chaleur. On ne peut donc pas dire que la formule qui donnera le coefficient de convection satisfera rigoureusement aux lois de l'homogénéité; elle pourra contenir des coefficients variables représentant des grandeurs nouvelles. Ceci limite encore la portée des formules de Nusselt.

Néanmoins les considérations d'homogénéité ont rendu de grands services, là où auparavant régnait l'empirisme à peu près complet; elles ont déblayé le terrain et circonscrit les recherches. On ne saurait les négliger au cours de recherches nouvelles; mais il faudrait abandonner l'hypothèse de la forme monôme et étudier de près la turbulence, qui leur échappe un peu.

La seconde ressource théorique, *l'étude approfondie de problèmes simples résolubles*, n'a pas été utilisée, en dépit des travaux remarquables de Boussinesq. Et cependant, ces problèmes simples sont pleins d'enseignements. Ils donnent des indications analogues à celle de l'homogénéité pour les groupements des grandeurs en invariants. Ils permettent d'analyser à fond les phénomènes; on se rend compte alors de la complexité réelle de la question, ou plutôt de la complexité minima à laquelle on doit s'attendre pour le problème expérimental. Ils donnent des indications sur les domaines dans lesquels des formules simples seront applicables. Ils ouvrent la voie à une étude mi-théorique, mi-expérimentale, destinée à rendre compte des phénomènes réels. Ils fournissent dans plusieurs cas

des formules qui soutiennent la comparaison avec les formules empiriques, et qui ont une autre portée. Ils peuvent suggérer dans les autres cas des formules approchées qui auront bien des chances de s'appliquer dans des domaines très étendus. Enfin, ils permettent déjà de définir les règles pratiques pour obtenir le rendement optimum de l'échange de chaleur, en précisant les dispositifs les plus favorables et en fournissant des idées générales qui sont des guides très sûrs.

Tels sont quelques-uns des avantages de cette seconde méthode, dont le seul inconvénient est de ne pouvoir, en l'état actuel de la science, traiter rigoureusement que des problèmes encore éloignés de la réalité dans la plupart des cas. Mais sa supériorité théorique sur les considérations d'homogénéité est grande. Néanmoins, comme nous partirons toujours des équations simplifiées qui supposent, entre autres, la constance des grandeurs physiques telle que la masse spécifique, la capacité calorifique, le coefficient de conductibilité, etc..., le choix de valeurs moyennes pour ces grandeurs s'imposera encore ; mais on pourra étudier la variation du coefficient de convection sur la surface d'échange et définir avec précision le coefficient moyen et les températures moyennes, ce que l'homogénéité ne permettait pas de faire.

CHAPITRE IV.

LES FORMULES BASÉES SUR L'HOMOGENÉITÉ.

Nous allons déterminer les invariants qui doivent entrer logiquement dans l'expression du coefficient α . Ces invariants sont de trois espèces :

1° **Invariants géométriques.** — Ce sont les divers rapports de longueurs définissant la forme de la surface d'échange et les contours du fluide. Ainsi, avec un fluide circulant dans un tube circulaire et rectiligne, nous aurons un seul invariant, le rapport de la longueur au diamètre. Ce type d'invariant a été tout d'abord négligé, puis on s'est aperçu qu'il était essentiel.

2° **Invariants dynamiques.** — Ce sont les monômes sans dimensions qui résultent des seules équations du mouvement permanent.

Déterminons-les avec nos équations simplifiées relatives au fluide incompressible doué de viscosité, en comparant deux champs semblables de vitesses. L'équation de continuité, qui se confond ici avec l'équation d'incompressibilité, ne fournit aucune relation.

La première des équations du mouvement s'écrit alors :

$$(6') \quad \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt} - \eta \cdot \Delta_2 u,$$

avec

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \text{ (régime permanent),}$$

En deux points homologues, le rapport de :

$$\rho \frac{du}{dt} \quad \text{à} \quad : \quad \eta \Delta_2 u,$$

aura la même valeur, proportionnelle à l'invariant :

$$(8) \quad \text{Re} = \frac{\rho V}{\theta} \times \frac{l^2 \theta}{\eta l} = \frac{\rho V l}{\eta};$$

C'est le *nombre de Reynolds*; on peut en réalité le considérer comme un vecteur orienté suivant la vitesse en chaque point, et dépourvu de dimensions.

l est une dimension principale, et V la vitesse.

Remarquons que nous avons pris soin d'éliminer le temps θ de l'expression de cet invariant, ce qui est logique en régime permanent.

De même, le rapport de :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{à} \quad \rho \frac{du}{dt},$$

aura la même valeur en deux points homologues des deux champs semblables de vitesses. Ce rapport est proportionnel à l'invariant, appelé *nombre d'Euler* :

$$(9) \quad \text{Eu} = \frac{dp}{dn} \times \frac{1}{\rho V} \times \frac{l}{V} = \frac{dp}{dn} \times \frac{l}{\rho V^2}.$$

dn étant la direction de la vitesse. Eu peut aussi être considéré comme un vecteur dirigé suivant cette vitesse.

Le produit de ces deux invariants est le *nombre de Lagrange* :

$$(10) \quad \text{La} = \text{Eu} \times \text{Re} = \frac{dp}{dn} \times \frac{l^2}{\eta V}.$$

L'équation (6') nous montre que, lorsque la force (X, Y, Z) est négligeable, il y a une relation entre Re et Eu . Cette relation fournit la valeur de la variation de pression $\frac{dp}{dn}$ le long d'un filet fluide, sous la forme :

$$(11) \quad \frac{dp}{dn} = \frac{\rho V^2}{l} \times f\left(\frac{\rho V l}{\eta}\right).$$

En réalité, la fonction f dépend des invariants géométriques et de la rugosité de la paroi.

Puisque le nombre d'Euler est une fonction du nombre de Reynolds, il suffit de considérer un seul des trois invariants définis ci-dessus, quand on ne cherche pas à calculer les pressions ; le plus simple est :

$$Re = \frac{\rho V l}{\eta}.$$

C'est celui dont nous nous servirons.

Reynolds exécuta des expériences fondamentales sur la perte de pression d'un fluide passant dans un tube. Il remarqua qu'au-dessous d'une certaine vitesse, appelée *vitesse critique*, le mouvement s'opérait par filets rectilignes parallèles ; pour le montrer, il faisait passer dans un courant d'eau, à l'intérieur d'un tube en verre, des filets colorés, et constatait qu'ils demeuraient rectilignes. Mais lorsque la vitesse augmentait, brusquement le phénomène se modifiait : les particules colorées ne décrivaient plus des lignes parallèles, mais des trajets désordonnés, le mouvement de translation d'ensemble se composant avec des oscillations et des tourbillons irréguliers. C'est ce qu'il appela la *turbulence*.

Il constata encore qu'en régime dit *tranquille*, appelé encore « Régime de Poiseuille », la variation de pression était donnée par :

$$\frac{dp}{dn} = C^{te} \times \frac{\eta V}{D^2},$$

D étant le diamètre, et V la vitesse moyenne calculée d'après le débit ; c'est-à-dire :

$$(12) \quad la = \frac{dp}{dn} \times \frac{D^2}{\eta V} = C^{te} = Eu \times Re = 32,$$

formule retrouvée par la théorie ; elle signifie qu'alors

la perte de pression est proportionnelle à la vitesse. Au contraire, à partir d'une certaine valeur de la vitesse moyenne, donnée par l'équation :

$$(13) \quad Re = \frac{\rho V D}{\eta} = 2.000 \text{ à } 3.000,$$

et dénommée vitesse critique, la variation de pression suit la loi :

$$(14) \quad La = \frac{dp}{dn} \times \frac{D^3}{\eta V} = C^{te} \times Re^{1-n} = C^{te} \times \left(\frac{\rho V D}{\eta} \right)^{1-n}.$$

Prandtl, dans sa théorie de la *Grenzschicht* (ou « film »), suppose qu'au contact de la paroi se trouve une couche liquide mince au sein de laquelle se fait la diminution de vitesse jusqu'à zéro, cette vitesse restant sensiblement constante au delà de cette pellicule adhérente, ce qui est approximativement conforme à la réalité. Il trouve que l'épaisseur de cette couche est une fonction de Re , et que l'exposant n est égal à 0,25 pour des tubes rugueux.

Nüsselt trouve $n = 0,21$, avec un tube plus rugueux.

Dans le cas d'une viscosité très faible, on aurait : $n = 0$, et :

$$(15) \quad Eu = \frac{dp}{dn} \times \frac{D}{\rho V^2} = C^{te}.$$

au-dessus de la vitesse critique. La perte de pression est alors proportionnelle au carré de la vitesse (formule de De Chézy).

3° L'invariant de l'équation de la chaleur. — L'équation (3'')

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} = a^2 \Delta_2 t,$$

fournit, par la considération de deux points homologues appartenant à deux champs semblables de vitesses et de

températures, l'invariant cherché. Pour ces deux champs, le rapport de $a^2 \Delta_2 t$ à : $u \frac{\partial t}{\partial x}$, aura la même valeur. Or, il est proportionnel à :

$$(16) \quad Pe = \frac{a^2 t}{l^2} \times \frac{1}{V} \times \frac{l}{t} = \frac{a^2}{Vl} = \frac{K}{c_p V l},$$

appelé *nombre de Péclet* ; il peut être considéré comme un vecteur dirigé suivant la vitesse, et dont la valeur absolue serait l'expression ci-dessus. Remarquons que le produit des nombres de Péclet et de Reynolds est un nouvel invariant, qui ne contient que des constantes physiques du fluide : c'est le *nombre de Stanton* :

$$St = Pe \times Re = \frac{K}{c_p \eta} = \frac{a^2 \rho}{\eta}.$$

4° Application au coefficient de convection d'un fluide en mouvement à l'intérieur d'un tube circulaire rectiligne. — D'après ce qui précède, le coefficient moyen α de convection sera égal au produit de $\frac{K}{D}$ par une fonction des valeurs moyennes de Re , Pe , et de $\frac{L}{D}$; ou, ce qui revient au même, de St , Pe et de $\frac{L}{D}$, rapport de la longueur au diamètre :

$$(17) \quad \alpha = \frac{K}{D} \times f \left(St, Pe, \frac{L}{D} \right);$$

Cette fonction doit du reste dépendre de la rugosité de la paroi.

Les expériences faites jusqu'à ce jour ayant été presque uniquement exécutées avec l'air, il est impossible d'en déduire l'influence de la constante physique St , qui, d'ail-

leurs, varie très peu avec la température pour un fluide déterminé. Il résulte de ceci que l'influence du nombre de Reynolds Re lui-même n'est pas connue.

Nüsselt a cependant proposé momentanément une formule où Re intervient, mais avec l'exposant (-0.064 très faible; cette formule présente peu d'intérêt.

Pour un fluide déterminé, le coefficient $\propto \frac{L}{K}$, dépendra à peu près uniquement de Pe et de $\frac{L}{D}$.

La dernière formule de Nüsselt-Groeber relative à l'air repose sur cette hypothèse, et sur l'hypothèse de la forme monôme. On ne saurait donc *a priori* l'étendre aux autres gaz, ni aux liquides, sans modification.

Quant à l'influence de la rugosité, elle est peut-être très faible pour les gaz; mais elle ne saurait être négligée avec les liquides, d'après les travaux de Sœnnecken.

Des formules analogues à la formule (17) peuvent facilement être écrites pour les divers problèmes d'échange de chaleur entre une paroi, et un fluide animé d'un mouvement d'ensemble de translation.

D'après (17), la quantité de chaleur échangée au total dans l'unité de temps est de la forme :

$$(18) \quad Q = \alpha \cdot S \cdot (t_1 - t_0) = \frac{K}{D} S (t_1 - t_0) \times f\left(St, Pe, \frac{L}{D}\right) \\ = \frac{K}{D} S (t_1 - t_0) \times f\left(\frac{K}{c\eta}, \frac{a^2}{VD}, \frac{L}{D}\right);$$

D'après ceci, Q est bien proportionnel à $(t_1 - t_0)$, et non à une puissance de $(t_1 - t_0)$ supérieure à l'unité; remarquons cependant que dans la fonction f , les variables dépendent de la température moyenne du fluide. $(t_1 - t_0)$ représente une valeur moyenne de la différence de température entre le fluide et la paroi.

5° Cas du problème du refroidissement. — Les équations du problème du refroidissement, ayant une forme particulière, donneront naissance à des invariants spéciaux où doivent intervenir la température et l'accélération de la pesanteur, puisque les différences de température sont la cause du mouvement.

Si on suppose le régime permanent, et l'axe des z dirigé vers le haut, la troisième équation (6) s'écrit :

$$(6'') \quad -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \eta \Delta^2 w - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right);$$

Les deux autres sont analogues, avec la suppression du terme : ρg .

Nous supposons que ρ ne dépend que de la température t , et non de la pression (hypothèse d'incompressibilité). Si t_0 est la température du fluide à distance du corps, et t_1 la température supposée uniforme à la surface de ce corps, on aura, en appelant β le coefficient de dilatation :

$$(18) \quad \rho = \rho_0 [1 + \beta (t - t_0)];$$

La force motrice est alors égale par unité de volume à :

$$(19) \quad \rho_0 g \beta (t - t_0),$$

vecteur dirigé vers le haut. Pour deux champs semblables de vitesses et de températures, le rapport de cette expression à $\rho u \frac{\partial w}{\partial x}$ sera le même en deux points homologues ; or ce rapport est proportionnel à :

$$(20) \quad \rho_0 g \beta (t - t_0) \propto \frac{1}{\rho_0} \frac{l}{V^2} = \frac{\eta l}{V^2} \propto \beta (t - t_0),$$

V étant la vitesse vraie en valeur absolue.

Le coefficient moyen de convection α serait donc de la forme :

$$\alpha = \frac{K}{l} \times \varphi \left[\frac{gl}{V^2} \beta (t_1 - t_0) \frac{cVl}{\eta} \cdot \frac{a^2}{lV} \right].$$

la fonction φ dépendant de la forme du corps.

Cette forme n'est pas définitive, car la vitesse V doit disparaître de l'expression de $\left(\alpha \frac{l}{K} \right)$, qui est donc nécessairement une fonction de *deux* combinaisons de ces trois invariants, ces combinaisons ne contenant pas la vitesse V . Ce sont par exemple :

$$Gr = \frac{gl}{V^2} \times \beta (t_1 - t_0) \times \left(\frac{cVl}{\eta} \right)^2,$$

ou :

$$(21) \quad Gr = \frac{gl^3 c^2 \beta (t_1 - t_0)}{\eta^2} \quad (\text{Nombre de Grashof})$$

et :

$$(22) \quad St = Re \times Pe = \frac{K}{c\eta} \quad (\text{Nombre de Stanton}).$$

Finalement :

$$(23) \quad \alpha = \frac{K}{l} \times \psi(Gr, St),$$

la fonction ψ dépendant des invariants géométriques qui définissent la forme du corps. Cette expression a été donnée par Nusselt.

Avec un fluide déterminé, une forme et une orientation données du corps, $\left(\alpha \frac{l}{K} \right)$ est fonction de Gr seul, puisqu'alors St est sensiblement constant. La fonction ψ dépend théoriquement de la rugosité de la paroi du solide.

Quand le coefficient de viscosité η est très faible, il doit disparaître de l'expression de α , qui prend alors la forme :

$$(23') \quad \alpha = \frac{K}{l} \psi \left(\frac{Gr}{St^2} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{Gr}{St^2} = \frac{gl^3 c^2 \beta (t_1 - t_0)}{K^2}.$$

Quand la viscosité du fluide est grande, les vitesses sont faibles, et dans l'équation (6') on peut négliger le terme en ρ du second membre. Écrivant que le rapport de la force : $\rho g \beta (t - t_0)$ au terme : $\eta \Delta^2 w$, reste le même pour deux champs semblables, on obtient le nouvel invariant provisoire :

$$\frac{\rho g \beta (t - t_0) l^2}{\eta V}$$

destiné à remplacer le nombre de Reynolds, et par suite on écrira :

$$\alpha = \frac{K}{l} \times \varphi \left[\frac{\rho g \beta l^2 (t - t_0)}{\eta V}, \frac{a^2}{lV} \right].$$

La vitesse V devant nécessairement disparaître de cette expression, α n'est fonction que du rapport de ces deux arguments :

$$(23'') \quad \alpha = \frac{K}{l} \times \psi \left[\frac{g \beta l^3 \rho^2 c (t - t_0)}{\eta K} \right] = \frac{K}{l} \times \psi \left(\frac{Gr}{St} \right).$$

Ce résultat a été mis en évidence par Davis en 1922, qui, d'une part, l'a établi théoriquement par des considérations inspirées des travaux de Boussinesq, et d'autre part, l'a vérifié expérimentalement avec des liquides visqueux. Groeber l'indique également dans son ouvrage de 1921.

Dans le cas d'un gaz, β doit être remplacé par sa valeur moyenne :

$$(24) \quad \beta = \frac{1}{T_m},$$

T_m étant la température absolue, moyenne entre T_0 et T_1 . La valeur exacte de β est en effet donnée d'après (19) par :

$$\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 (t - t_0)} = \frac{T - T_0}{T(T - T_0)} = \frac{1}{T}.$$

On voit donc que, contrairement au cas du problème

avec mouvement d'ensemble du fluide, le coefficient de convection doit effectivement dépendre de la différence de température $(t_1 - t_0)$; ceci tient à ce que $(t_1 - t_0)$ est la cause du mouvement au voisinage de la surface du corps.

Naturellement, les conclusions ci-dessus sont valables, quel que soit le signe de $(t_1 - t_0)$, c'est-à-dire, qu'il s'agisse des lois du réchauffement ou des lois du refroidissement.

Nous reviendrons sur ce problème pour examiner les expériences faites et les diverses formules proposées depuis Dulong et Petit.

On peut imaginer, et on a créé, effectivement, d'autres invariants que ceux dont nous avons parlé ci-dessus. Mais ces autres invariants ne sont en général que des combinaisons des précédents, à moins de faire intervenir de nouvelles grandeurs. La simplification au point de vue expérimental est précieuse : dans le problème du tube, par exemple, au lieu d'avoir à faire varier indépendamment L , D , K , c , t_0 , t_1 , ρ , η , V , il suffira de considérer les variables St , Pe et $\frac{L}{D}$; soit : trois variables au lieu de huit.

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION THÉORIQUE DE QUELQUES
PROBLÈMES SIMPLES.

Nous examinerons seulement le cas du fluide à mouvement d'ensemble, le seul abordable, et nous traiterons successivement le problème de Boussinesq et le problème du tube, ce dernier dans plusieurs hypothèses. Nous apprécierons ensuite l'écart avec les résultats d'expériences.

1. — Le problème de Boussinesq.

M. Boussinesq, dont nous allons suivre la méthode d'exposition, a traité complètement le cas d'un solide immergé dans un fluide non visqueux, animé d'un mouvement permanent d'ensemble avec potentiel de vitesses ; la température de la surface du solide est supposée constante en chaque point, mais non nécessairement uniforme ; les hypothèses simplificatrices exposées dans le chapitre III sont supposées réalisées. En particulier, la vitesse V d'entraînement est supposée assez grande pour que l'effet de la variation de ρ sur le mouvement soit négligeable. Dans ces conditions, les équations du mouvement et l'équation de la chaleur sont complètement séparées, comme nous l'avons déjà montré. Le problème se divise donc en deux :

1° Détermination des lignes de courant et des surfaces équipotentiellles de vitesse ;

2° Le mouvement étant bien connu, application des lois de la conductibilité.

Boussinesq traite successivement le problème plan, le problème de révolution et le cas général. Auparavant, il montre, par des considérations d'homogénéité, que le flux de chaleur est proportionnel à la différence de température, et que le coefficient de convection α doit avoir la forme :

$$(25) \quad \alpha = \frac{K}{l} \varphi \left(\frac{K}{c \sqrt{V} l} \right) = \frac{K}{l} \varphi \text{ Pr},$$

ce qui est une forme simplifiée de la relation (17) appliquée à un fluide dépourvu de viscosité; en réalité, φ dépend de la forme du corps.

1° Le problème simple du demi-plateau mince indéfini (fig. 1). — On suppose le fluide animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse V constante dans la

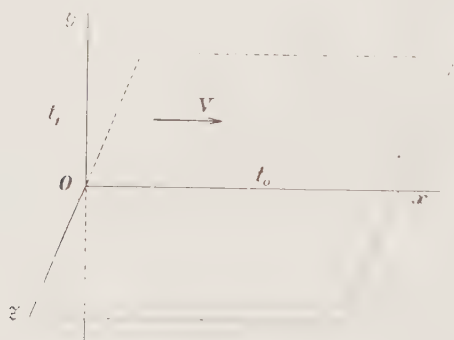


FIG. 1. — Le demi-plateau indéfini.

direction des x positifs. Le plateau occupe la partie du plan xOz , située du côté des x positifs, jusqu'à une certaine valeur X de x . Il est infiniment mince : sa température en chaque point est une fonction donnée de x :

$$(26) \quad t_0 = \varphi(x) + t_1.$$

La température du fluide dans l'espace $x < 0$, et à l'infini, est uniforme et égale à t_0 .

Dans ces conditions, la présence du plateau ne modifie en rien le mouvement de translation uniforme, puisqu'on néglige les variations de ρ .

Il suffit de résoudre l'équation (3') qui s'écrit :

$$(27) \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = v \frac{\partial t}{\partial x},$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{cases} t = t_1 \text{ pour } x < 0; \\ t = t_1 \text{ à l'infini (sauf dans la direction } Ox); \\ t = t_0 = \varphi(x) + t_1 \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et } x > 0. \end{cases}$$

Si nous admettons que le fluide envisagé est très mauvais conducteur de la chaleur (K faible), ce qui aura lieu généralement pour les gaz et les liquides usuels, sauf le mercure, alors la couche fluide échauffée de part et d'autre de la plaque sera de faible épaisseur, tout au moins jusqu'à une valeur de x pas trop grande. Parallèlement à Oy , la variation de température au voisinage de la plaque sera beaucoup plus rapide que dans la direction Ox . Par suite, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ sera beaucoup plus grand que $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$.

Pour simplifier l'équation (27), nous négligerons $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ vis-à-vis de $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, et nous écrirons :

$$(27') \quad a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = v \frac{\partial t}{\partial x}.$$

En tenant compte des conditions aux limites, la solution cherchée est, comme il est facile de le vérifier directement :

$$(28) \quad t - t_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi \left(x - \frac{v}{a^2} \frac{y^2}{4\beta^2} \right) e^{-\beta^2} d\beta$$

en remarquant que pour un argument négatif, la fonction φ se réduit à zéro. Le flux de chaleur par unité de surface et de temps est donné par :

$$(29) \quad Q = -K \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = K \times \frac{2}{a} \sqrt{\frac{V}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi'(x - \omega^2) d\omega, \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\rho V} \int_0^{\infty} \varphi'(x - \omega^2) d\omega,$$

cette dernière expression étant obtenue en dérivant (28), puis posant :

$$\frac{Vy^2}{4a^2c\rho^2} = \omega^2.$$

Le coefficient de convection α pour l'abscisse x est alors :

$$(30) \quad \alpha_x = \frac{Q}{\tau x}.$$

Le flux pour la longueur x de la plaque et l'unité de largeur vaut :

$$(31) \quad \int_0^x Q dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\rho V} \int_0^{\infty} \varphi(x - \omega^2) d\omega$$

Si nous faisons $\varphi(x) = t_0 - t_1 = C^te$ pour $x > 0$, dans les formules, l'intégration (31) aura lieu entre 0 et $\sqrt{x}$, et on aura :

$$\text{Flux moyen par unité de surface} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}} \cdot (t_0 - t_1),$$

d'où le coefficient moyen :

$$(32) \quad \alpha_0 x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}}.$$

tandis que le coefficient vrai α_x pour l'abscisse x est donné par la relation :

$$\alpha_x = \frac{d}{dx} (\alpha_0 x^{1/2}),$$

ou :

$$(33) \quad \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\varphi V}{x}} = \alpha_0 x^{\frac{1}{2}}.$$

Le coefficient vrai de convection pour l'abscisse x est la moitié du coefficient moyen de 0 à x .

Tous deux croissent comme la racine carrée de la vitesse. De plus, ils varient comme $\frac{1}{\sqrt{x}}$, et sont théoriquement infinis à l'origine 0, à cause de la discontinuité du champ des températures.

Pour appliquer les formules (29) et (30), il faut prendre garde que $\varphi(x)$ présente une discontinuité pour $x = 0$. Soit φ_0 cette discontinuité quand x passe de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ très petit, on voit que (29) s'écrit :

$$(29') \quad Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\varphi V} \left[\int_0^{\sqrt{x-\varepsilon}} \varphi'(x-\omega^2) d\omega + \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi'(u) du}{2\sqrt{x-u}} \right] \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\varphi V} \left[\frac{\varphi_0}{2\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x-\varepsilon}} \varphi'(x-\omega^2) d\omega \right].$$

Alors on peut y faire :

$$\varphi(x) = t_0 - t_1 = C^{\text{te}}; \quad \varphi' = 0; \quad \varphi_0 = t_0 - t_1,$$

et on obtient la formule (33).

2° **Extension des résultats précédents au cas du problème à deux dimensions.** — Le problème à deux dimensions est le suivant : un cylindre indéfini est immergé dans un courant fluide à vitesses perpendiculaires aux génératrices, et avec potentiel de vitesses.

Prenons comme plan de la figure une section droite, et soit V la vitesse à l'infini, dirigée suivant Ox . Appelons $V\xi$ le potentiel des vitesses. Traçons les lignes équipotentiellles. Les lignes de courant leur sont ortho-

gonales. Nous pouvons définir des lignes de courant par une variable μ qui s'annule pour le filet central (celui qui se divise en deux au contact du corps) et qui, à distance du corps, soit équivalente à y . Autrement dit, avec des valeurs équidistantes de ξ et des valeurs équidistantes de μ , et la même raison pour les deux progressions, on tracera un réseau de petits carrés, qui sera une représentation conforme du plan. La fonction $\xi + i\mu$ sera une fonction analytique de $x + iy$ (ce qui définit μ parfaitement).

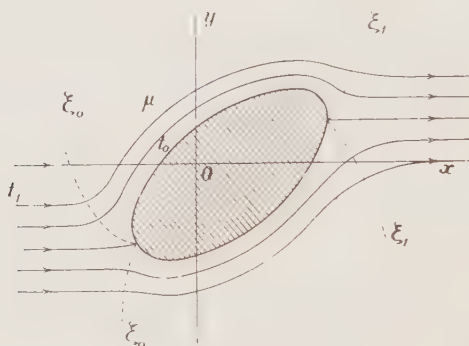


FIG. 2. — Le problème plan avec potentiel de vitesses.

Dès lors, la température t de l'état de régime permanent pourra être considérée comme fonction de ξ et de μ , au lieu de x et y .

D'ailleurs :

$$(34) \quad \Delta_2 \xi = \Delta_2 \mu = 0,$$

et

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\mu}{dn}\right)^2 = h^2,$$

si ds et dn sont l'élément de ligne de courant et l'élément normal.

L'équation de la chaleur est :

$$(35) \quad \frac{a^2}{V} \Delta_2 t = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Mais on a la relation :

$$\frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \left(\frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \wedge \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2} = h \frac{dt}{ds} - h^2 \frac{\partial t}{\partial \xi}.$$

De plus on peut écrire identiquement :

$$\Delta_2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = h^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2} \right),$$

en vertu des relations (34). Finalement :

$$(36) \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2} \right),$$

est l'équation du problème : elle a exactement la même forme que l'équation (27), mais avec substitution des variables ξ et μ aux variables x et y . Dès lors le problème se ramène au problème précédent, à condition de faire $\xi_0 = 0$, sur la première ligne équipotentielle qui vient toucher le corps, et de poser, sur la surface du cylindre, $t_0 - t_1 = \varphi(\xi)$, pour la moitié supérieure du périmètre de la section, parcourue par une branche du filet central :

$t_0 - t_1 = \varphi_1(\xi)$, pour la moitié inférieure de ce périmètre, parcourue par l'autre branche du filet central.

On négligera encore $\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2}$ devant $\frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$ dans (36). La solution sera pour la région $\mu > 0$:

$$t - t_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi \left(\xi - \frac{V}{a^2} \frac{\mu^2}{4\beta^2} \right) e^{-\beta^2} d\beta;$$

Pour la région $\mu < 0$, il faudra mettre φ_1 au lieu de φ .
Le flux total pour l'unité de longueur des génératrices

sera pour $\mu > 0$, ξ variant de 0 à ξ_1 , sur le corps :

$$\int_0^{\xi_1} Q ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\rho V} \int_0^\infty \varphi(\xi_1 - \omega^2) d\omega,$$

car :

$$\begin{aligned} Q ds &= -K \frac{\partial t}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dn} ds \\ &= -K \frac{\partial t}{\partial \mu} d\xi \end{aligned}$$

(pour $\mu = 0$).

Le cylindre recevra donc en tout par unité de longueur des génératrices, le flux :

$$\int_0^{\xi_1} Q ds + \int_0^{\xi_1'} Q_1 ds' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\rho V} \int_0^\infty [\varphi(\xi_1 - \omega^2) + \varphi_1(\xi_1' - \omega^2)] d\omega.$$

Si :

$$t_0 - t_1 = \varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) = C'' ,$$

sur la surface du cylindre, on a l'expression simple :

$$\begin{aligned} (37) \quad \text{Flux total} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Kc\rho V} \int_0^{\sqrt{\xi_1}} \frac{1}{2} (t_0 - t_1) d\omega \\ &= \frac{1}{2} (t_0 - t_1) \sqrt{\frac{Kc\rho V \xi_1}{\pi}}. \end{aligned}$$

Telle est la formule générale pour un cylindre de forme quelconque ; elle ne fait intervenir que la différence $V \xi_1$ entre les valeurs extrêmes du potentiel de vitesses sur la surface. Cette formule constitue le théorème de Boussinesq.

D'après cela, le coefficient moyen de convection sera donné, en appelant L le demi-périmètre de la section, par la relation :

$$(38) \quad \alpha = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{Kc\rho V \xi_1}{\pi}}.$$

D'ailleurs, pour des cylindres semblables et semblable-

ment disposés, ξ_1 est proportionnel à une dimension linéaire.

M. Boussinesq a appliqué la formule (38) au cylindre circulaire, au cylindre elliptique, et au plateau mince dont l'axe est disposé obliquement.

Pour le cylindre circulaire (exemple, tube d'eau d'une chaudière), on a (rayon R) :

$$(39) \quad \begin{cases} \xi = x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + C^{te}; \\ \eta = y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right); \\ \xi_1 = 4R; \quad L = \pi R; \end{cases}$$

d'où :

$$(40) \quad \alpha = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{Kc_p V}{\pi R}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{Kc_p V}{L}}.$$

Pour le cylindre elliptique d'orientation quelconque et demi-axes a et b , on a :

$$(41) \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{P'}{P}} \sqrt{\frac{Kc_p V}{L}},$$

en posant :

P = périmètre de l'ellipse = $2L$;

P' = périmètre du rectangle circonscrit = $4a + 4b$.

Pour le plateau mince d'orientation quelconque, α a la même valeur que pour le plateau parallèle au courant :

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc_p V}{L}} \quad (L = \text{longueur du plateau}).$$

En général on a :

$$(42) \quad \alpha = C^{te} \times \sqrt{\frac{Kc_p V}{L}},$$

L étant la longueur du filet fluide adhérent à la paroi du solide.

La valeur de la constante croît depuis le plateau jusqu'au cylindre circulaire en passant par la forme elliptique. La *courbure* des surfaces est donc favorable aux échanges de chaleur. Le raccourcissement du trajet des filets fluides sur le corps est également favorable à l'augmentation du coefficient α .

3° Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un corps de révolution ayant son axe Ox orienté suivant le courant. — La marche est analogue au début à celle du problème précédent.

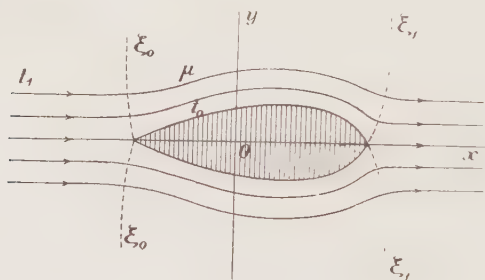


FIG. 3. — Le problème de révolution.

On considérera les surfaces de révolution équipotentielles, définies par :

$V\xi = C^{\text{te}}$, et les lignes de courant définies par la variable μ qui s'annule sur l'axe de révolution Ox , et telle que :

$$(43) \quad d\mu = y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right),$$

équation intégrable, car :

$$y \Delta_2 \xi = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0,$$

exprime la condition d'intégrabilité.

On a les identités :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{2\mu} = 2 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 = y^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = \left(\frac{d\mu}{dn} \right)^2 = y^2 \left(\frac{d\xi}{ds} \right)^2. \end{array} \right.$$

L'équation de la chaleur :

$$(45) \quad \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{a^2}{V} \Delta_2 t,$$

devient, tous calculs faits :

$$(46) \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{a^2}{V} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial t}{\partial \mu} + y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2} \right].$$

Pour arriver à une forme simple, il faut non seulement négliger $\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2}$ devant $y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$, mais encore négliger le second terme de la parenthèse.

La première simplification est légitime avec un fluide mauvais conducteur, comme nous l'avons déjà montré. La seconde s'impose moins *a priori*, car le terme correspondant contient $\frac{\partial t}{\partial \mu}$ qui n'est pas du tout négligeable.

Négliger ce terme par rapport à $y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$ c'est *négliger*

$2 \frac{\partial t}{\partial \mu}$ devant $y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$. car pour un corps relativement allongé,

$\frac{\partial \xi}{\partial x}$ est voisin de 1, et $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ est voisin de 0. Nous apprécions *a posteriori* la valeur des formules obtenues en calculant ces deux grandeurs et en les comparant.

M. Boussinesq fait une troisième simplification, en réduisant y à sa valeur sur la surface du solide de révolution, ce qui suppose y assez grand par rapport à l'épaisseur de la couche échauffée.

Posant alors :

$$(47) \quad \xi' = \int_{z_0}^z y^2 d\xi,$$

il arrive à l'équation déjà résolue :

$$(48) \quad \frac{\partial t}{\partial \xi'} = \frac{a^2}{V} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

La solution est par suite :

$$t - t_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi \left(\xi' - \frac{V}{a^2} \frac{x^2}{4\beta^2} \right) e^{-\beta^2 \omega^2} d\omega,$$

si on a sur la surface du corps :

$$t_0 - t_1 = \varphi(\xi');$$

(t_1 , température constante du fluide à l'amont .

La zone $2\pi y ds$ transmet la chaleur :

$$\begin{aligned} 2\pi y Q ds &= -2\pi y ds \times K \frac{\partial t}{\partial n} = -2\pi y ds \times K \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{dn} \\ &= -2\pi K \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_0 y^2 \frac{d\xi}{ds} ds = -2\pi K \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_0 d\xi'; \end{aligned}$$

si ds et dn sont les éléments longitudinal et normal sur la surface. Le flux total de chaleur est donc :

$$(49) \quad 2\pi \int_0^{s_1} y Q ds = 4 \sqrt{\pi K c \rho V} \int_0^{\sqrt{\xi'_1}} \varphi(\xi'_1 - \omega^2) d\omega.$$

Si :

$$t_0 - t_1 = C^{te},$$

alors ce flux total vaut :

$$(50) \quad 2\pi \int_0^{s_1} y Q ds = 4(t_0 - t_1) \sqrt{\pi K c \rho V \xi'_1},$$

formule analogue à la formule (37), mais où la variation $V(\xi_1 - \xi_0)$ du potentiel des vitesses est remplacée par $V \int_{z_0}^{\xi_1} y^2 d\xi$ calculée sur la courbe génératrice.

Si S est l'aire totale, le coefficient moyen de convection est :

$$(51) \quad \alpha = \frac{4}{S} \sqrt{\pi K c \rho V \xi'_1},$$

et nous remarquons que ξ'_1 est proportionnel au cube d'une dimension linéaire. Cette formule a été appliquée aux cas de la sphère, de l'ellipsoïde de révolution, du disque normal au courant, et de l'aiguille placée longitudinalement.

α est encore de la forme :

$$(42') \quad \alpha = C^{te} \times \sqrt{\frac{K c \rho V}{L}},$$

L étant le demi-périmètre de la méridienne.

Légitimité de l'approximation faite par M. Boussinesq en négligeant le terme en $\frac{\partial t}{\partial \mu}$ dans (46). — Nous supposons pour simplifier qu'on a : $t_0 = C^{te}$, ce qui est une hypothèse plutôt défavorable. Sur la surface du corps, on a $\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0$, puisque t_0 est constant. Par suite $\frac{\partial t}{\partial \xi'} = 0$, et (48) donne : $\frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2} = 0$; on vérifie du reste directement que $\frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$ s'annule avec μ , mais qu'il n'en est pas de même de $\frac{\partial t}{\partial \mu}$. Dans l'équation (46), M. Boussinesq a négligé le terme en $\frac{\partial t}{\partial \mu}$, qui ne s'annule pas sur la surface, vis-à-vis de $y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$ qui s'annule. *L'approximation faite semble donc ne pas être légitime*, car ce sont les valeurs des dérivées de t au voisinage même de la surface du solide qui sont les plus importantes.

Le rapport des deux termes est sensiblement égal

dans ce cas, si on suppose le corps assez allongé, à :

$$(52) \quad \frac{2 \frac{\partial t}{\partial \mu}}{y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}} = - \frac{4a^2 \xi'}{\mu V y^2}.$$

On voit donc qu'en réalité, pour y assez grand, ainsi que V , et pour a^2 petit (fluide très mauvais conducteur), l'approximation sera peut-être acceptable. L'épaisseur de la couche fluide affectée par les échanges de chaleur peut s'évaluer en admettant qu'elle se limite là où $\frac{\partial t}{\partial \mu}$ atteint le dixième de sa valeur, ce qui a lieu pour :

$$\frac{\mu^2}{4a^2} \frac{V}{\xi'} = \frac{1}{\log e} = 2,3025 \quad \text{ou} \quad \mu_1 = 3,03 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\xi'}{V}};$$

tandis que $\frac{4a^2 \xi'}{\mu V y^2} = \frac{1}{10}$ donne : $\mu_2 = \frac{4a^2 \xi'}{10 V y^2}$, et l'approximation faite par Boussinesq est légitime à partir de $|\mu| > \mu_2$.

L'épaisseur de la couche fluide échauffée est alors approximativement :

$$\frac{\mu_1}{y} \neq 3a \sqrt{\frac{\xi'}{V y^2}}.$$

Nous allons montrer que le fait de négliger le terme en $\frac{\partial t}{\partial \mu}$ par rapport à $y^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \mu^2}$ devient légitime à partir d'une valeur moyenne du rayon y de révolution, et que cette approximation est à peu près équivalente à celle qui consiste à remplacer dans (46) y par ses valeurs à la surface.

Autrement dit, nous allons établir que les formules de Boussinesq (49), (50), (51) et (42'), seront légitimes, pourvu que la valeur moyenne de y soit grande par rapport à

la valeur moyenne de $3a \sqrt{\frac{\xi'}{Vy^2}}$ (épaisseur moyenne de la couche fluide échauffée).

On pourra par exemple se contenter de vérifier la relation :

$$(53) \quad y^2_{\text{moy}} > 30 \cdot a \sqrt{\frac{\xi'}{V}},$$

(en prenant le facteur 10, et la valeur maxima ξ'_1 de ξ'), ce qui sera d'autant plus facile que le corps sera plus court.

En effet, si cette inégalité est vérifiée, l'épaisseur moyenne

$$\frac{\mu_2}{y} = \frac{4a^2\xi'}{10Vy^3},$$

sera, en tenant compte de (53), plus petite que :

$$\frac{4}{9.000} y = \frac{y}{2.250}.$$

L'épaisseur de la couche adhérente au solide pour laquelle l'approximation négligeant $\frac{\partial t}{\partial y}$ n'est pas légitime, sera donc inférieure au 1/225 de celle de la couche échauffée. Cette approximation elle-même est donc légitime.

D'après l'inégalité (53), on ne pourra pas appliquer les formules obtenues au cas d'une aiguille mince, sauf pour des vitesses très grandes. Cette inégalité peut se remplacer approximativement, en tenant compte de l'expression de ξ' , par :

$$(53') \quad y_{\text{moy}} > 30a \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{V}}.$$

Avec ces restrictions, nous pouvons donner les valeurs de la constante dans la formule (42'), calculées par

Boussinesq ; mais nous devons laisser de côté le cas de l'aiguille mince.

Pour la sphère :

$$C^{te} = \sqrt{2};$$

Pour l'ellipsoïde de révolution :

$$C^{te} = 8 \sqrt{\frac{2\pi L}{3BS^2}},$$

avec :

$$B = \frac{2}{ab^2} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)(a^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad (S, \text{ surface totale}),$$

Pour le disque normal au courant :

$$C^{te} = \frac{8}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{2}.$$

4° Généralisation du problème précédent au cas d'un corps convexe quelconque. — La formule (51) s'applique à tout corps convexe se comportant, au point de vue de la disposition des filets fluides, de façon analogue à un corps de révolution situé dans un courant de vitesse parallèle à son axe, et avec les mêmes restrictions, à condition de remplacer $\sqrt{\xi'_1}$ par sa valeur moyenne pour l'ensemble des filets superficiels qui partent du même point et qui aboutissent au même point. Ce résultat intuitif a été retrouvé directement par Boussinesq au moyen d'un raisonnement approché.

Pour un filet superficiel déterminé, on aura :

$$\xi_1 = \int_0^{\xi_1} y^2 d\xi;$$

mais y a besoin d'être défini. Considérons les intersections de la surface du corps avec les surfaces $\xi = C^{te}$; y sera le rapport de la distance de deux filets superficiels

infiniment voisins à leur distance comptée sur la courbe intersection de longueur 2π . Cette dernière courbe servira aussi à calculer la moyenne de $\sqrt{\frac{z'}{z_1}}$.

Il faut bien se garder cependant d'appliquer la formule (51) au cas d'un cylindre de génératrices obliques par rapport au courant. On peut par contre traiter le cas de l'ellipsoïde quelconque :

5° Cas du courant fluide oblique par rapport aux génératrices d'un cylindre. — Prenons un cylindre circulaire de longueur L et de diamètre notable. Dans un courant normal aux génératrices, le coefficient de convection est :

$$\alpha_1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{\pi R}}.$$

Dans un courant parallèle aux génératrices, et l'enveloppant, on est ramené au problème du plateau ; et d'ailleurs la formule (51) donne le résultat :

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{L}}.$$

Il est intéressant de comparer ces deux coefficients ; on a :

$$(54) \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{L}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{D}{L}}.$$

Dès que la longueur du cylindre est supérieure à son demi-périmètre de section, et même un peu avant, l'activité des échanges de chaleur est plus grande avec un courant normal qu'avec un courant parallèle. Autrement dit, le raccourcissement du trajet des filets fluides sur le corps est, pour une même vitesse, favorable aux échanges de chaleur. On peut généraliser ce résultat à un corps quelconque et dire que *le maximum d'échanges de cha-*

leur sera obtenu avec le minimum de trajet des filets fluides sur sa surface.

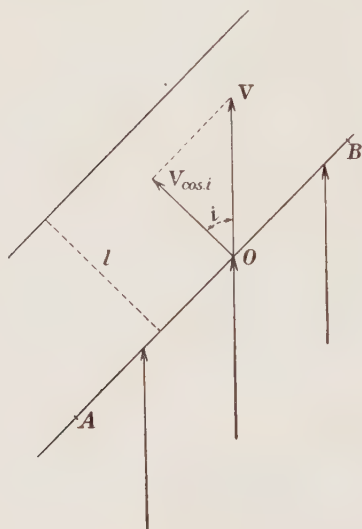


FIG. 4. — Le plateau oblique.

Précisons davantage. Prenons un plateau indéfini parallèle à la direction du courant, mais dont le bord lui soit oblique, l'axe du plateau faisant l'angle i avec la direction de la vitesse V .

La longueur L d'un filet est égale à :

$$L = \frac{l}{\cos i},$$

si l est la largeur du plateau.

On a donc :

$$(55) \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kc_p V}{l}} \times \cos i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kc_p \cdot V \cos i}{l}}.$$

Le coefficient α est multiplié par $\sqrt{\cos i}$. Tout se passe donc comme si la vitesse était $V \cos i$ au lieu de V . Seule la composante de la vitesse qui est normale au bord du plateau intervient. L'activité des échanges de chaleur diminue donc quand i augmente.

Faisant $i = 90^\circ$, on trouve $\alpha = 0$, parce qu'alors aucun filet fluide ne passe plus sur le plateau ; cette valeur de i ne correspond pas au cas du courant parallèle au bord et enveloppant (ceci se comprend si on incline progressivement le courant fluide arrivant entre deux points déterminés A et B du bord, ce qui assure la constance de la surface baignée).

Ce résultat s'étend sans difficulté au cas du cylindre

quelconque. Un courant oblique au cylindre se comportera, au point de vue des échanges de chaleur, comme un courant normal dont la vitesse est la composante de V normale aux génératrices. Inclinant le cylindre progressivement, α décroîtra comme $\sqrt{\cos i}$.

Le problème de Boussinesq offre un intérêt pratique très grand ; il s'applique par exemple, en première approximation, à l'étude des échanges de chaleur entre les gaz chauds et les tubes d'eau des chaudières, quoique dans ce cas on ait toujours un régime turbulent. Les formules expérimentales, peu nombreuses, se rapprochent, on l'a vu, des formules ci-dessus. Des expériences faites par M. Compan en 1902 avec une boule de cuivre noircie placée dans le courant d'air d'un ventilateur électrique, ont montré la proportionnalité de Q à $(t_1 - t_0)$ et à $\sqrt{V}$.

D'après ce qui précède, on aura intérêt à diriger les gaz chauds à peu près normalement aux tubes d'eau, c'est-à-dire suivant le trajet superficiel le plus court ; ceci suppose naturellement que le trajet total de ces gaz est cependant suffisant pour assurer leur combustion complète. Mais on voit qu'un allongement de ce trajet obtenu, en faisant passer les gaz parallèlement aux tubes, ne sera avantageux que si les remous supplémentaires aux coudes, en activant les échanges, permettent de compenser cette infériorité théorique.

Par cette analyse élémentaire nous savons combien le coefficient de convection est variable avec le point considéré sur la surface d'échange, et aussi avec les diverses circonstances, forme, courbure, inclinaison de la vitesse, etc... Cette théorie bien que faisant des hypothèses simplificatrices qui ne sont pas réalisées, donne cependant la plupart des éléments qui influent sur les échanges de chaleur, et le sens dans lequel ils agissent. Les corrections à apporter aux formules elles-mêmes ne sont pas très grandes, comme nous le verrons plus loin.

II. — Le problème de l'échange de chaleur à l'intérieur d'un tube cylindrique.

Ce problème, beaucoup plus expérimenté que le précédent, soulève au contraire des difficultés théoriques plus grandes. La méthode de Boussinesq n'est plus applicable en général, et il faut avoir recours aux développements en série pour trouver la solution. Nous traiterons successivement le cas du courant de vitesse uniforme passant entre deux plateaux parallèles, le cas du même courant circulant dans un tube cylindrique circulaire, et enfin le problème correspondant au mouvement de Poiseuille.

1° **Problème du double plateau.** — On a deux plateaux

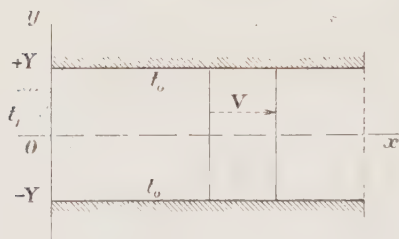


FIG. 5. — Le double plateau plan.

parallèles de largeur indéfinie et de longueur L , se faisant face, portés à la température uniforme t_0 . Un courant fluide arrive normalement aux bords, et parallèlement aux plateaux distants de $2Y$;

il parcourt L avec une vitesse uniforme V (fluide non-visqueux); sa température initiale est : t_1 .

Il faut résoudre l'équation :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right),$$

avec : pour

$$x = 0; \quad t = t_1;$$

pour

$$y = \pm Y \quad \text{et} \quad x > 0 : t = t_0.$$

Comme précédemment nous négligerons $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ en face de $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ et pour la même raison. En réalité, ceci est contradictoire avec les conditions initiales, car pour $x = 0$ et $y = Y$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ est infini, ainsi que $\frac{\partial t}{\partial x}$.

Mais il faut tenir compte de ce que ces conditions initiales sont approximatives et pratiquement irréalisables; en réalité, la température sur la section Oy n'est déjà plus égale tout à fait à t_1 (la même remarque s'applique au problème précédent et a été faite par Boussinesq, qui en tenait compte dans l'expression de la fonction φ).

Finalement l'erreur commise sera négligeable pourvu que l'on ne prenne pas x très voisin de zéro.

L'équation :

$$(56) \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a^2}{V} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2},$$

admet comme type de solutions particulières paires

$$t = e^{-\mu^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} \cos\left(\mu \frac{y}{Y}\right).$$

μ étant un paramètre.

Posant :

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \sum A_\mu \cdot e^{-\mu^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} \cos\left(\mu \frac{y}{Y}\right),$$

avec une infinité de valeurs croissantes de μ , on aura la solution cherchée, pourvu que :

$$\sum A_\mu \cos\left(\mu \frac{y}{Y}\right) = 1,$$

quel que soit y compris entre $-Y$ et $+Y$, et que $\cos \mu = 0$.

Par suite :

$$\mu_k = \frac{\pi}{2} (2k + 1),$$

et la résolution du problème de Fourier donne :

$$A_k = \frac{4}{\pi} (-1)^k \frac{1}{2k + 1}.$$

Finalement on a la solution cherchée en série uniformément convergente :

$$(57) \quad \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k + 1} e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} \cos\left[2k + 1, \frac{\pi}{2} \frac{y}{Y}\right];$$

et le flux par unité de surface :

$$(58) \quad Q = -K \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{2K}{Y} (t_1 - t_0) \sum_0^{\infty} e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}}.$$

Pour définir le coefficient α_x de convection pour l'abscisse x , il faut définir la température moyenne t_m du fluide dans la section x . La vitesse étant uniforme, t_m est facile à définir par :

$$(59) \quad t_m - t_0 = \frac{1}{Y} \int_0^Y (t - t_0) dy = \frac{8}{\pi^2} (t_1 - t_0) \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}}.$$

Alors :

$$(60) \quad \alpha_x = \frac{Q}{t_m - t_0} = \frac{K\pi^2}{4Y} \times \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} + e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} + \dots}{\frac{1}{12} e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} + \frac{1}{32} e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}} + \dots}.$$

α_x augmente avec la vitesse V . Il diminue quand x augmente; infini pour $x = 0$, il tend pour x infini vers la valeur $\frac{\pi^2}{4} \frac{K}{Y} = 2,47 \cdot \frac{K}{Y}$, indépendante de V .

Le coefficient moyen de convection peut se définir de deux façons.

Si on prend comme température moyenne du fluide dans tout le volume intérieur au tube, l'expression :

$$t_0 + \frac{1}{x} \int_0^x (t_m - t_0) dx,$$

alors on aura :

$$\begin{aligned} (61) \quad \alpha'_0 x &= \frac{\int_0^x Q dx}{\int_0^x (t_m - t_0) dx} \\ &= \frac{K\pi^2}{4Y} \times \frac{(1 - e^{-\zeta}) + \frac{1}{3^2} (1 - e^{-3^2\zeta}) + \frac{1}{5^2} (1 - e^{-5^2\zeta}) + \dots}{(1 - e^{-\zeta}) + \frac{1}{3^4} (1 - e^{-3^2\zeta}) + \frac{1}{5^4} (1 - e^{-5^2\zeta}) + \dots} \end{aligned}$$

en posant :

$$(62) \quad \zeta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{Y^2}.$$

Si au contraire on prend, comme température moyenne, la moyenne entre t_1 et t_m , cette température étant calculée à l'extrémité x , on obtiendra une autre définition de α_0^x . La première est théoriquement préférable ; mais pour faire la comparaison avec les résultats d'expériences, il faudrait prendre tantôt l'une, tantôt l'autre. Du reste, ces deux définitions deviennent très vite équivalentes quand la vitesse croît, car alors t_1 et t_m diffèrent peu. La seconde définition nous donnera :

$$\begin{aligned} \alpha_0^x &= \frac{\text{chal. totale perdue par le fluide dans le trajet } x}{\text{surface totale de contact}} \times \frac{1}{\frac{t_1 + t_m}{2} - t_0}; \\ (63) \quad \alpha_0^x &= \frac{2YV\rho c(t_1 - t_m)}{2x\left(\frac{t_1 + t_m}{2} - t_0\right)} = \frac{2Yc\rho V}{x} \times \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{1 + \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}. \end{aligned}$$

ou d'après (59) :

$$(64) \quad \alpha_0 x = \frac{2Yc\rho V}{x} \times \frac{1 + \frac{8}{\pi^2} \left[e^{-\zeta} + \frac{1}{3^2} e^{-9\zeta} + \frac{1}{5^2} e^{-25\zeta} + \dots \right]}{1 + \frac{8}{\pi^2} \left[e^{-\zeta} + \frac{1}{3^2} e^{-9\zeta} + \frac{1}{5^2} e^{-25\zeta} + \dots \right]}.$$

Etude de coefficient moyen de convection $\alpha_0 x$. — Quand ζ est grand, c'est-à-dire quand $\frac{VY^2}{a^2 x}$ est petit, $\alpha_0 x$ est sensiblement proportionnel à V . Cela est vrai à 1 p. 100 si $\zeta > 5$, c'est-à-dire si on a : $\frac{VY^2}{a^2 x} < \frac{1}{2}$ environ.

Cela se comprend *a priori*, puisqu'alors $(t_m - t_0)$ est voisin de zéro ; de plus, la vitesse est assez faible, et x assez grand, pour que le fluide se refroidisse presque jusqu'à t_0 ; dans ces conditions, la chaleur échangée est simplement proportionnelle au débit, c'est-à-dire à V . Nous voyons ainsi que *le coefficient α ne saurait croître, en aucun cas, plus vite que la vitesse*. Remarquons que la formule (61) n'aurait pas donné le même résultat : pour ζ grand, on trouve que $\alpha' x_0$ tend vers une limite constante : égale à $3 \cdot \frac{K}{Y}$.

La formule (64) ne donne pas au premier abord ce qui se passe quand ζ est petit ; alors la série entre crochets se rapproche de la valeur $\frac{\pi^2}{8}$ qu'elle atteint pour $\zeta = 0$; le numérateur de l'expression de $\alpha_0 x$ décroît avec ζ . Nous allons calculer la valeur asymptotique de cette série. Posons :

$$(65) \quad F(\zeta) = e^{-\zeta} + \frac{1}{3^2} e^{-9\zeta} + \frac{1}{5^2} e^{-25\zeta} + \frac{1}{7^2} e^{-49\zeta} + \dots$$

$F(\zeta)$ ne peut s'exprimer avec les fonctions usuelles.

Nous utiliserons l'identité connue :

$$(66) \quad \int_0^\infty e^{-\omega^2} \cos 2\beta\omega \cdot d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\beta^2}.$$

Alors :

$$F(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2} \left[\frac{\cos(2\sqrt{\zeta}\omega)}{1^2} + \frac{\cos(2 \cdot 3\sqrt{\zeta}\omega)}{3^2} + \frac{\cos(2 \cdot 5\sqrt{\zeta}\omega)}{5^2} + \dots \right] d\omega.$$

Or, on a, pour $0 \leq u \leq \pi$, l'expression suivante pour la série de cosinus uniformément convergente :

$$(67) \quad \frac{\cos u}{1^2} + \frac{\cos 3u}{3^2} + \frac{\cos 5u}{5^2} + \dots = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - u \right),$$

ce qui se vérifie par les séries de Fourier.

Posons :

$$u = 2\sqrt{\zeta} \cdot \omega.$$

La sommation de l'intégrale ci-dessus peut se faire entre 0 et π , avec une approximation très grande. Si donc on a :

$$(68) \quad 2\sqrt{\zeta} \leq 1, \quad \text{ou} \quad \zeta \leq \frac{1}{4}, \quad \text{ou} \quad \frac{VY^2}{a^2x} \geq \pi^2,$$

on pourra remplacer la série de cosinus par sa valeur pour :

$$0 \leq u \leq \pi,$$

et écrire :

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\zeta} \cdot \omega \right) d\omega \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \sqrt{\pi\zeta} \cdot \int_0^\infty \omega e^{-\omega^2} d\omega; \end{aligned}$$

ou :

$$(69) \quad F(\zeta) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi\zeta} = \frac{\pi^2}{8} \left[1 - \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}} \right].$$

Alors le coefficient de convection α_0^x deviendra, puisque

$$a^2 = \frac{K}{c\rho} :$$

$$(70) \quad \alpha_0^x = \frac{2Yc\rho V}{x} \times \frac{\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}}{2 - \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}} \times \frac{1}{1 - \frac{a}{Y} \sqrt{\frac{x}{\pi V}}}.$$

Pour $\frac{VY^2}{a^2x}$ grand, on retrouve la même expression que dans le problème du plateau unique :

$$(71) \quad \text{Limite } (\alpha_0^x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}}.$$

Ceci se conçoit parfaitement, car avec l'augmentation de cet argument, la différence $t_1 - t_m$ décroît continuellement, de telle sorte que la température du fluide dans le plan médian $y = 0$ devient sensiblement constante sur toute la longueur x . Autrement dit, l'épaisseur de la couche fluide affectée par les échanges de chaleur devient inférieure à la demi-distance entre les deux plateaux, et la théorie de Boussinesq devient applicable. Il était pourtant intéressant de retrouver la formule (71) par une méthode toute différente.

En définitive, α_0^x est proportionnel à V aux faibles vitesses et à $\sqrt{V}$ aux grandes vitesses.

Nous pouvons tracer la courbe représentant la variation de $\alpha_0^x \propto \frac{Y}{K}$ en fonction de ζ , ou mieux en fonction de $\lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{\zeta}}$.

Ces deux quantités sont dépourvues de dimensions, et on a :

$$\lambda = \sqrt{\frac{Y}{x}} \sqrt{\frac{VY}{a^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2Y}{x}} \times \sqrt{\frac{2YV}{a^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2Y}{x}} \times \sqrt{\frac{1}{Pe}},$$

en prenant le nombre de Péclet :

$$Pe = \frac{a^2}{2YV}.$$

$\frac{Y}{K} \alpha_0^x$ est bien une fonction de Pe et de $\frac{2Y}{x}$, comme le faisaient prévoir les considérations d'homogénéité. On voit de plus que c'est une fonction de $\frac{2Y}{x} \propto \frac{1}{Pe}$, ce qui réduit à un seul le nombre des arguments dont dépend $\alpha_0^x \frac{Y}{K}$.

On a en effet la formule exacte :

$$(72) \quad \alpha_0^x \frac{Y}{K} = 2\lambda^2 \times \frac{1 - \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)}{1 + \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)}.$$

Pour : $0 < \lambda < 0,7$ environ, on a :

$$\alpha_0^x \times \frac{Y}{K} = 2\lambda^2 \text{ à } 1 \text{ p. } 100 \text{ près.}$$

Pour : $\lambda > \pi$, on a :

$$(70') \quad \alpha_0^x \times \frac{Y}{K} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}}},$$

très sensiblement.

La courbe commence par un arc de parabole, et se termine par une branche très voisine de son asymptote :

$$\alpha_0^x \cdot \frac{Y}{K} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda + \frac{2}{\pi} \quad (\text{Voir la figure 6}).$$

Quelles sont les parties intéressantes de cette courbe ?
Avec les valeurs

$V = 1$ mètre-seconde = 3.600 mètres-heure ;
 $Y = 0^m,01$;
 $x = 1$ mètre ;
 $a = 0,3$ (air à 40°) ;

on a :

$$\lambda = 2 \text{ environ,}$$

ce qui, pour les expériences faites, représente un minimum, sauf pour les essais de Ser.

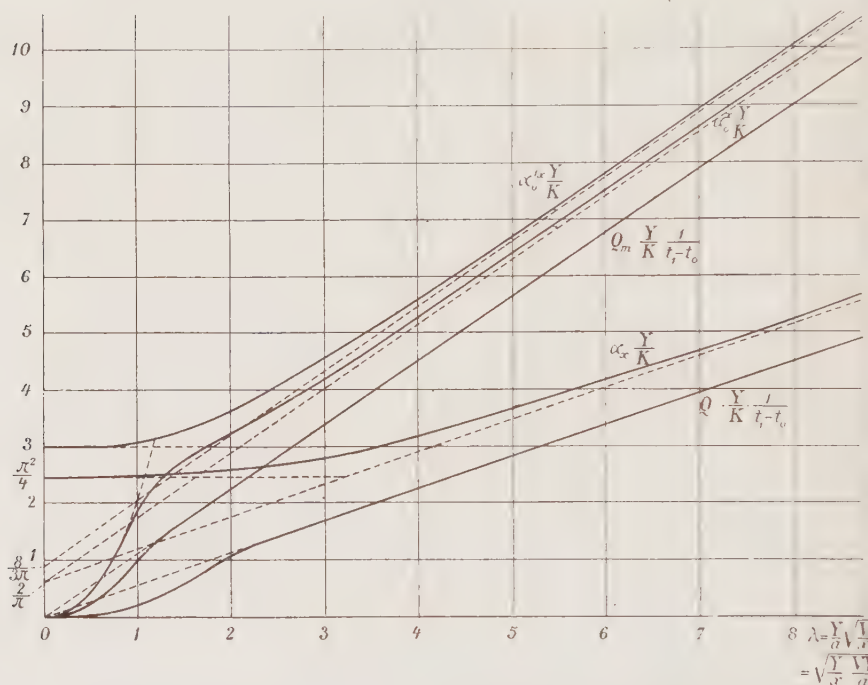


FIG. 6. — Le problème du double plateau avec potentiel de vitesses. — Valeur des coefficients de convection et des flux de chaleur par unité de surface (α_x , α_0^x , $\alpha_0^{'x}$, Q , Q_m).

Si donc les hypothèses simplificatrices faites s'appliquaient au cas réel, on devrait trouver la proportionnalité à $\sqrt{V}$. En réalité, la turbulence du mouvement fait croître α plus vite, suivant une puissance de V nécessairement comprise entre $1/2$ et 1 . Ser a fait des expériences au-dessous de la vitesse critique, et il s'est trouvé dans

la zone intermédiaire $\lambda < \pi$. Cette vitesse critique est donnée ici par :

$$\frac{2\rho V_c Y}{\eta} = 2.000$$

environ. Pour $V < V_c$ les formules ne sont pas applicables, car bien que le mouvement soit tranquille, la vitesse n'est pas uniforme dans une section.

Pour l'air à 20°, on a :

$$\eta = 1,79 \times 10^{-6} \times 9,81$$

en unités : kilogramme-masse, mètre, seconde ; et par suite, si $Y = 1$ centimètre, on a :

$$V_c = 1^m,50 \text{ par seconde.}$$

Coefficient vrai de convection α_x . — Il n'y a pas en général de relation simple exacte entre le coefficient moyen α_0^x et le coefficient vrai α_x de convection donné par la formule (60). Mais quand λ est grand, c'est-à-dire quand on peut appliquer la formule (71), on a :

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \alpha_0^x,$$

très sensiblement (comme avec le plateau simple) ; quand λ est petit, ($\lambda < 0,7$), on a approximativement :

$$\alpha_x = \frac{\pi^2 K}{4 Y} = C^{te}.$$

Dans le cas général, les diverses grandeurs :

$$\alpha_x, \alpha_0^x, \alpha_0'^x, Q, \int_0^x Q dx,$$

peuvent s'exprimer facilement au moyen de la série

$$F(\zeta) = \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0},$$

de sa dérivée et de sa fonction primitive. On a en effet, outre la relation (72) qui donne α_0^x :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \frac{\pi^2 K}{4Y} \times \frac{-F'(\zeta)}{F(\zeta)}; \\ \alpha_0^x = \frac{3K}{Y} \times \frac{1 - \frac{8}{\pi^2} F(\zeta)}{\frac{96}{\pi^4} \int_0^\zeta F(\zeta) d\zeta}; \\ Q = -\frac{2K}{Y} (t_1 - t_0) F'(\zeta); \\ \int_0^x Q dx = Y c_p V (t_1 - t_0) \left[1 - \frac{8}{\pi^2} F(\zeta) \right] = x \cdot Q_m. \end{array} \right.$$

Quand $\lambda > \pi$, ou $\zeta < \frac{1}{4}$, on a sensiblement, outre la formule (70') : qui donne α_0^x :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \frac{K}{Y} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{\pi}}}; \\ \alpha_0^x = \frac{K}{Y} \cdot \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{3\lambda \sqrt{\pi}}}; \\ Q = \frac{K}{Y} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} (t_1 - t_0); \\ \frac{1}{x} \int_0^x Q dx = 2Q. \end{array} \right.$$

Le graphique de la *fig. 6* donne, en fonction de λ , les valeurs de :

$$\frac{Y}{K} \alpha_x, \quad \frac{Y}{K} \alpha_0^x, \quad \frac{Y}{K} \alpha_0^{x'}, \quad \frac{Y}{K} \cdot \frac{Q}{t_1 - t_0} \quad \text{et} \quad \frac{Y}{K} \cdot \frac{Q_m}{t_1 - t_0}$$

2° Le problème du tube cylindrique circulaire avec vitesse uniforme dans la section. — Prenons un tube cylindrique circulaire de rayon R au lieu du double plateau, et sup-

posons que le mouvement du fluide non visqueux est tranquille, et de vitesse V constante dirigée suivant l'axe Ox . Soit t_1 sa température initiale, et t_0 la température uniforme de la paroi intérieure du tube. Prenons des coordonnées cylindriques x et y . Nous aurons l'équation :

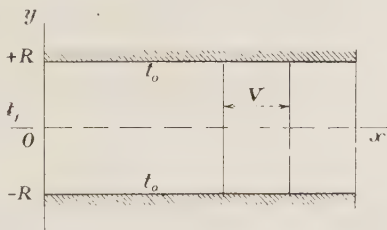


FIG. 7.

Le tube cylindrique circulaire.

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a^2}{V} \Delta_2 t = \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial t}{\partial y} \right),$$

avec les conditions :

Pour :

$$x = 0, \quad t = t_1, \quad \text{si} \quad -R < y < +R.$$

Pour :

$$y = \pm R, \quad \text{et} \quad x > 0, \quad t = t_0.$$

Négligeons $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ en face de $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, comme précédemment ; $\frac{1}{y} \frac{\partial t}{\partial y}$ n'est pas négligeable. On aura donc à résoudre une équation un peu différente :

$$(73) \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial t}{\partial y} \right).$$

Essayant une solution particulière de la forme

$$t = e^{-\mu^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}} \cdot \varphi \left(\frac{y}{R} \right),$$

on aura pour déterminer φ , l'équation :

$$(74) \quad z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + z\varphi = 0.$$

$\varphi(z)$ fonction paire, sera donc la fonction $J_0(z)$ de Bessel, à un facteur constant près.

La solution cherchée aura donc la forme d'une série de fonctions J_0 :

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \sum_{k=1}^{h=\infty} A_k e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}} \cdot J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right),$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_0(\mu_k) = 0, \\ \sum_1^{\infty} A_k \cdot J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right) = 1, \end{array} \right.$$

quel que soit y entre $-R$ et $+R$.

La fonction J_0 de Bessel donne des séries qui ont des propriétés analogues à celles des séries de Fourier. En particulier, une fonction paire quelconque $f(y)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(y) = \sum_1^{\infty} B_k \cdot J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right),$$

entre $-R$ et $+R$, si la série obtenue est uniformément convergente, les μ_k étant les racines successives de $J_0(z)$; les coefficients B_k s'obtiennent en multipliant les deux membres par :

$$y J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right) dy,$$

et intégrant.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^R y f(y) J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right) dy &= B_k \times \int_0^R y J_0^2\left(\mu_k \frac{y}{R}\right) dy \\ &= B_k \times \frac{R^2}{2} [J_0'^2(\mu_k) + J_0^2(\mu_k)]; \end{aligned}$$

tous les autres termes disparaissant, d'après une identité connue.

Ici la deuxième relation (75) sera satisfaite avec :

$$A_k = \frac{2}{R^2 J_0'^2(\mu_k)} \cdot \frac{-R^2}{\mu_k} \cdot J_0'(\mu_k) = -\frac{2}{\mu_k} \cdot \frac{1}{J_0'(\mu_k)},$$

car

$$J_0(\mu_k) = 0.$$

Finalement on a la solution du problème par la série uniformément convergente :

$$(76) \quad \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = - \sum_1^{\infty} \frac{2}{\mu_k J_0'(\mu_k)} \cdot e^{-\mu_k^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} \cdot J_0\left(\mu_k \frac{y}{R}\right).$$

Les racines de $J_0(z)$ sont très voisines des racines de sa valeur asymptotique :

$$J_0(z) \neq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right),$$

pour z grand positif, qui sont :

$$\mu'_k = (4k - 1) \frac{\pi}{4}.$$

Les μ'_k diffèrent peu, et de moins en moins quand k augmente, des μ_k . Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 2,405 \\ \mu_2 = 5,520 \\ \mu_3 = 8,654 \\ \mu_4 = 11,792 \\ \mu_5 = 14,931 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu'_1 = 2,3562 \\ \mu'_2 = 5,4978 \\ \mu'_3 = 8,6394 \\ \mu'_4 = 11,7810 \\ \mu'_5 = 14,9226, \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Le flux par unité de surface et de temps est :

$$Q = -K \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=R} = \frac{2K}{R} (t_1 - t_0) \sum_1^{\infty} e^{-\mu_k^2 \frac{a^2 x}{V R^2}}.$$

La température moyenne dans une section droite est donnée par :

$$(76') \quad t_m - t_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R (t - t_0) y dy = 4(t_1 - t_0) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}},$$

et le coefficient vrai de convection pour l'abscisse x :

$$(77) \quad \alpha_x = \frac{Q}{t_m - t_0} = \frac{K}{2R} \times \frac{\sum_1^{\infty} e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}}}{\sum_1^{\infty} \frac{e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}}}{\mu_k^2}}.$$

De même que pour le double plateau, nous aurons deux définitions du coefficient moyen de convection. La première sera :

$$(78) \quad \alpha_0^x = \frac{\int_0^x Q dx}{\int_0^x (t_m - t_0) dx} = \frac{K}{2R} \times \frac{\sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} (1 - e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}})}{\sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} (1 - e^{-\mu_k^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}})}.$$

La seconde, celle de α_0^x , utilisera $\frac{t_1 + t_m}{2}$ comme température moyenne. La différence entre ces deux définitions sera négligeable dès que V sera assez grand :

$$\alpha_0^x = \frac{\pi R^2 \rho V c (t_1 - t_m)}{2\pi R x \left(\frac{t_1 + t_m}{2} - t_0 \right)} = \frac{R c \rho V}{x} \times \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{1 + \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}},$$

ou :

$$(79) \quad \alpha_0^x = \frac{R c \rho V}{x} \times \frac{1 - 4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu^2} e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{1 + 4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu^2} e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}},$$

avec :

$$\lambda = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{x} \frac{1}{Pe}}.$$

en posant $D = 2R$ et : $Pe = \frac{a^2}{VD}$, nombre de Péclet.

Quand $\lambda < 1$, on a sensiblement (à 1 p. 100 près) :

$$\alpha_0^x = \frac{Rc_p V}{x},$$

proportionnel à la vitesse, tandis que α_x se réduit approximativement à :

$$\mu_1^2 \frac{K}{2R} = 2,89 \frac{K}{R},$$

et α'^x_0 à : $4 \frac{K}{R}$.

Valeurs asymptotiques des coefficients α . — Quand λ est grand, la formule (79) devient difficile à calculer directement; nous allons déterminer par une méthode semblable à celle du problème précédent la valeur asymptotique de α_0^x . On procéderait de même pour α_x et pour α'^x_0 .

Posant :

$$(80) \quad G(\lambda) = 4 \sum \frac{1}{\mu_k^2} e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2}},$$

on aura, utilisant l'identité (66) :

$$G(\lambda) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2} \left[\frac{\cos \frac{2\mu_1 \omega}{\lambda}}{\mu_1^2} + \frac{\cos \frac{2\mu_2 \omega}{\lambda}}{\mu_2^2} + \dots \right] d\omega.$$

La série absolument convergente des cosinus peut s'évaluer approximativement en écrivant :

$$H = \frac{\cos \frac{2\mu_1 \omega}{\lambda}}{\mu_1^2} + \frac{\cos \frac{2\mu_2 \omega}{\lambda}}{\mu_2^2} + \dots = \frac{1}{4} - \frac{2 \sin^2 \frac{\mu_1 \omega}{\lambda}}{\mu_1^2} - \frac{2 \sin^2 \frac{\mu_2 \omega}{\lambda}}{\mu_2^2} - \dots$$

Quand $\frac{\mu_1 \omega}{\lambda} < \frac{\pi}{4}$, on voit que l'on peut, sans erreur notable, pour faire la sommation de la série en $\sin^2$, remplacer les μ_k par les μ'_k . D'ailleurs, il suffit de faire varier ω de 0 à 3 dans l'intégrale. On fera donc : $\lambda > \frac{12}{\pi} \mu_1$, ou sensiblement $\lambda > 9$, pour avoir $G(\lambda)$ avec une erreur relative inférieure à 1 p. 100, et tendant vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

La série de cosinus équivaut alors à :

$$H \neq \frac{1}{4} - \left[\sum \frac{1}{(4k-1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{16}} - \sum \frac{\cos(4k-1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\lambda}}{(4k-1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{16}} \right]$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^2} \cos 3u + \frac{1}{7^2} \cos 7u + \frac{1}{11^2} \cos 11u + \dots \\ = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) - \frac{\pi}{8} u - \frac{u^2}{8} - \frac{u^4}{96} - \dots \end{aligned}$$

par développement en série convergente pour $0 < u < \frac{\pi}{2}$

(car la dérivée seconde de cette série est égale à $+\frac{1}{4 \cos u}$ dans ces limites, ce qui se vérifie facilement au moyen des formules de Fourier appliquées à une série de cosinus uniformément convergente).

Posant :

$$u = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\lambda}$$

on voit que :

$$H = \frac{1}{4} - \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{8} u - \frac{u^2}{8} - \frac{u^4}{96} - \dots \right) = \frac{1}{4} - \frac{\omega}{\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2 \omega^4}{96 \lambda^4} - \dots$$

Par suite :

$$(81) \quad G(\lambda) = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty He^{-\omega^2} d\omega = 1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{32\lambda^4} + \dots$$

et :

$$\frac{R}{K} \alpha_0^x = \lambda^2 \cdot \frac{1 - G(\lambda)}{1 + G(\lambda)},$$

est une fonction de λ seul, qui, pour $\lambda > 9$, vaut l'expression asymptotique :

$$\frac{R}{K} \alpha_0^x = \frac{\frac{4\lambda}{\sqrt{\pi}} - 1 - \frac{\pi^2}{32\lambda^4}}{2 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{32\lambda^2}}.$$

avec une erreur d'autant plus faible que λ est plus grand.

Négligeant les termes en $\frac{1}{\lambda^2}$, on aura :

$$(82) \quad \frac{R}{K} \alpha_0^x = \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{\pi}}} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda}}{1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{\pi}}},$$

d'où : la formule suivante, valable pour $\lambda > 9$:

$$(83) \quad \alpha_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}} \left[1 - \frac{a}{4R} \sqrt{\frac{\pi x}{V}} \right] \times \frac{1}{1 - \frac{2a}{R} \sqrt{\frac{x}{\pi V}}}$$

Quand $\lambda = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}}$ augmente indéfiniment, α_0^x tend vers la valeur :

$$\lim(\alpha_0^x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\rho V}{x}},$$

qui est encore, comme on devait s'y attendre, l'expression de α_0^x pour le plateau. En effet, pour λ grand, l'épais-

seur de la couche échauffée devient petite par rapport au rayon du tube, et la formule de Boussinesq devient applicable.

On trouve également pour $\lambda > 9$, avec la même approximation :

$$(83') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \frac{K}{R} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}}{1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}}}; \\ Q = \frac{K}{R} (t_1 - t_0) \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda} \right]; \\ \frac{1}{x} \int_0^x Q dx = \frac{2K}{R} (t_1 - t_0) \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda} \right]; \\ \alpha_0' x = \frac{K}{R} \cdot \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda}}{1 - \frac{8}{3\lambda \sqrt{\pi}}}. \end{array} \right.$$

En définitive, nous arrivons à des résultats tout à fait parallèles à ceux du problème précédent. Le coefficient vrai α_x a encore pour valeur limite (pour λ grand) la moitié de α_0^x , ou de $\alpha_0'^x$ qui sont alors très sensiblement égaux.

La formule (82) permet de tracer la courbe de $\frac{R}{K} \alpha_0^x$ en fonction de λ .

On trouve une courbe partant de l'origine, commençant par un arc de parabole, et se terminant par une branche très voisine de son asymptote.

$$\alpha_0'^x \cdot \frac{R}{K} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda + \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \quad (\text{Voir la figure 8}).$$

L'applicabilité pratique des formules ci-dessus est limitée par le phénomène de turbulence, pour $V > V_c$, vitesse

critique, qui est donnée par :

$$Re = \frac{2\rho R V_c}{\eta} = 2.000$$

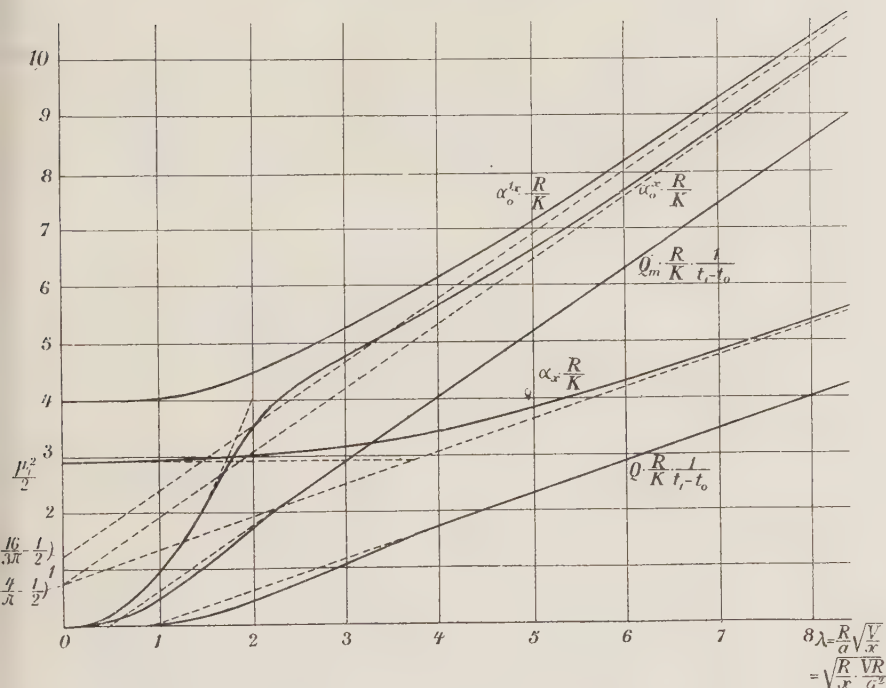


FIG. 8. — Le problème du tube circulaire avec potentiel de vitesses. — Valeur des coefficients de convection et des flux de chaleur par unité de surface (α_x , α_0^x , $\alpha_0'^x$, Q , Q_m). On a : $Q_m = \frac{1}{x} \int_0^x Q dx$.

environ, et par l'hypothèse d'une vitesse uniforme dans une section, ce qui n'est jamais exactement réalisé.

Les résultats d'expérience sont tous au-dessus de la courbe théorique et s'en éloignent de plus en plus à partir de $\lambda = 5$ environ (Nüsselt) pour suivre une loi de proportionnalité à une puissance supérieure à $1/2$, mais inférieure à 1.

Remarquons que les calculs des deux problèmes précédents ne supposent pas que K , c , ρ , et V sont séparément constants, mais seulement que l'expression :

$$\frac{a^2}{V} = \frac{K}{c\rho V},$$

est une constante, ainsi que K . Or, d'après la constance du débit et la constance de la section, on a rigoureusement : $\rho V = C^{te}$. *Les calculs sont donc applicables en supposant seulement K et c constants*, et le produit ρV uniforme dans une section.

Dans la réalité, K croît assez vite avec la température et c croît lentement. Ainsi, pour l'air, K passe de 0,0203 pour 0° , à 0,0418 pour 400° , tandis qu'entre les mêmes températures c passe de 0,240 à 0,252.

La *fig.* 8 donne les valeurs de :

$$\alpha_x \cdot \frac{R}{K}, \quad \alpha_0^x \cdot \frac{R}{K}, \quad \alpha_0'^x \cdot \frac{R}{K}, \quad Q \cdot \frac{R}{K} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0}, \quad \text{et} \quad Q_m \frac{R}{K} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0},$$

en fonction de λ .

3° Le problème du tube cylindrique circulaire avec fluide visqueux en mouvement tranquille. — Supposons que le

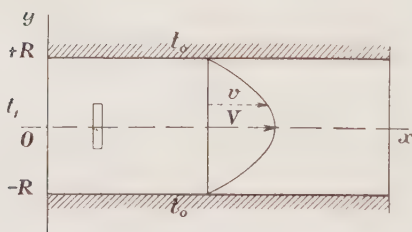


FIG. 9. — Le tube circulaire avec mouvement de Poiseuille.

fluide soit doué de viscosité et que le régime soit celui de Poiseuille. Alors la vitesse V sera variable dans une section. La loi de variation se trouve très simplement en écrivant l'équilibre d'un

cylindre d'axe Ox , de rayon y , et de hauteur dx , soumis simultanément aux forces de viscosité sur son con-

tour latéral et à la différence de pression sur ses deux faces (la pression étant nécessairement uniforme dans une section) :

$$\eta \cdot \frac{dv}{dy} \times 2\pi y dx = \pi y^2 dp;$$

d'où :

$$(84) \quad \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot y,$$

et :

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2) = V \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right),$$

en remarquant que $\frac{dp}{dx}$ est négatif et que $v = 0$ pour $y = \pm R$, et en appelant V la vitesse maximum (vitesse axiale). C'est la loi de Poiseuille, d'après laquelle la vitesse v varie suivant une loi parabolique en fonction de y . La vitesse moyenne V_m correspondant au débit, sera donnée par :

$$\pi R^2 V_m = \int_0^R V \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \times 2\pi y dy = \pi \frac{R^2}{2} V;$$

d'où :

$$V_m = \frac{V}{2}.$$

L'équation de la transmission de chaleur est, en négligeant $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$:

$$(85) \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{v}{a^2} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{V}{a^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \frac{\partial t}{\partial x},$$

les conditions initiales et aux limites étant toujours les mêmes.

Une solution particulière de cette équation aura la forme :

$$t = e^{-\mu^2 \frac{a^2}{V} \frac{x}{R^2}} \cdot \varphi \left(\mu \frac{y}{R}, \mu \right).$$

Portant dans (85), on trouve pour la fonction : $\varphi(z, \mu)$, l'équation :

$$(86) \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right) \varphi = 0,$$

analogue à (74), mais avec le facteur $\left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right)$ en plus, et le paramètre μ .

Les conditions initiales et aux limites donnent, en posant :

$$(87) \quad \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \sum_1^\infty A_k e^{-\mu_k^2 \frac{\alpha^2 x}{V H^2}} \cdot \varphi\left(\mu_k \cdot \frac{y}{R}, \mu_k\right);$$

les équations :

$$(88) \quad \begin{cases} \varphi(\mu_k, \mu_k) = 0, \\ \sum_1^\infty A_k \cdot \varphi\left(\mu_k \frac{y}{R}, \mu_k\right) = 1. \end{cases}$$

la dernière devant être satisfaite quel que soit y compris entre $-R$ et $+R$. C'est là la méthode suivie par Nüsselt. La fonction paire φ se développe en série d'après (86). On aura :

$$\varphi(z, \mu) = 1 + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \dots + b_{2n} z^{2n} + \dots,$$

avec les relations :

$$b_2 = -\frac{1}{4}; \dots \quad 4n^2 b_{2n} = \frac{b_{2n-2}}{\mu^2} - b_{2n-2},$$

qui permettent le calcul de proche en proche des coefficients.

On a encore :

$$\varphi(z, \mu) = e^{\frac{z^2}{2\mu^2}} \left[1 - \frac{z^2}{2^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu}\right) + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu}\right) \left(1 + \frac{2 \cdot 3\varepsilon}{\mu}\right) - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu}\right) \left(1 + \frac{2 \cdot 3\varepsilon}{\mu}\right) \left(1 + \frac{2 \cdot 5\varepsilon}{\mu}\right) + \dots \right],$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

Une fois $\varphi(z, \mu)$ calculé, on y fait $z = \mu$, et on cherche les racines : $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$, de l'équation :

$$\varphi(\mu, \mu) = 0.$$

Puis, on résout la deuxième équation (88), qui est un développement en série analogue à une série de fonctions de Bessel. Multipliant les deux membres par ;

$$y \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \varphi\left(\mu_k \frac{y}{R}, \mu_k\right) dy,$$

et intégrant de 0 à R, on aura, les autres termes disparaissant :

$$\int_0^R y \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \varphi\left(\mu_k \frac{y}{R}, \mu_k\right) dy = A_k \int_0^R y \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \varphi^2\left(\mu_k \frac{y}{R}, \mu_k\right) dy,$$

d'où on tire :

$$A_k = - \frac{\mu_k \varphi'_z(\mu_k, \mu_k)}{\int_0^{\mu_k} z \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2}\right) \varphi^2(z, \mu_k) dz},$$

si $\varphi'_z(z, \mu)$ désigne la dérivée de φ par rapport à z .

On calcule A_k au moyen des tables donnant $\varphi(z, \mu_k)$.

Nüsselt a trouvé pour les trois premiers termes de la série (87) :

$$(89) \quad \begin{cases} \mu_1 = 2,705 \\ \mu_2 = 6,66 \\ \mu_3 = 10,3 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 1,477 \\ A_2 = -0,810 \\ A_3 = 0,835 \end{cases}$$

et il a calculé les tables de $\varphi(z, \mu_1)$, $\varphi(z, \mu_2)$ et $\varphi(z, \mu_3)$ pour $0 < z < \mu_1, \mu_2$, ou μ_3 .

Le flux de chaleur par unité de surface et de temps est, en supposant $t_1 > t_0$:

$$90) \quad Q = -K \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=R} = -\frac{K}{R} (t_1 - t_0) \sum_1^{\infty} A_k e^{-\mu_k^2 \frac{a^2 x}{R^2}} \cdot \mu_k \varphi'_z(\mu_k, \mu_k).$$

Les trois premiers coefficients :

$$- A_k \cdot \mu_k \cdot \varphi'_z(\mu_k, \mu_k)$$

ont pour valeurs respectives :

$$+ 1,498; \quad + 1,114 \quad \text{et} \quad + 0,503.$$

La température moyenne dans une section, choisie par Nüsselt, est définie par :

$$t_m - t_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R y (t - t_0) dy;$$

Cette moyenne correspond à ses mesures expérimentales, mais elle n'est pas choisie de façon rationnelle. Il convient en effet de choisir la définition de t_m qui s'introduit naturellement d'elle-même quand on calcule la quantité de chaleur perdue par le fluide dans son passage à l'intérieur du tube. Cette quantité de chaleur est en effet entre les abscisses 0 et x , donnée par les deux expressions :

$$\int_0^R 2\pi y dy \cdot V \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \rho c (t_1 - t) = \pi R^2 V_m \rho c (t_1 - t_m);$$

d'où :

$$V_m \frac{R^2}{2} (t_1 - t_m) = \int_0^R v (t_1 - t) y dy,$$

définition logique de t_m , qu'on peut écrire encore :

$$(91) \quad (t_m - t_0) \int_0^R v y dy = \int_0^R v (t - t_0) y dy,$$

d'où on tire, d'après (87) :

$$\frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0} = - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k} e^{-\mu_k^2 \frac{(\alpha^2 x)}{R^2}} \cdot \varphi' z (\mu_k, \mu_k),$$

en remarquant que le produit $A_k \varphi'_z (\mu_k, \mu_k)$ est toujours négatif, et par suite, que les termes de la série sont tous positifs.

D'après (89) et (90) on trouve, pour les valeurs des trois premiers coefficients de cette série :

$$\frac{4}{\mu_1^2} \times 1,498 = 0,821; \quad \frac{4 \times 1,114}{\mu_2^2} = 0,401; \quad \frac{4 \times 0,503}{\mu_3^2} = 0,0190.$$

Le coefficient vrai de convection α_x est alors :

$$(92) \quad \alpha_x = \frac{Q}{t_m - t_0} \\ = \frac{K}{4R} \cdot \frac{1,498 \cdot e^{-\mu_1^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + 1,114 \cdot e^{-\mu_2^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + 0,503 \cdot e^{-\mu_3^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + \dots}{\frac{1,498}{\mu_1^2} e^{-\mu_1^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + \frac{1,114}{\mu_2^2} e^{-\mu_2^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + \frac{0,503}{\mu_3^2} e^{-\mu_3^2 \frac{a^2 x}{V R^2}} + \dots}.$$

Cette expression diffère de celle de Nusselt, parce que la définition de α_x n'est pas la même.

Posant $\lambda = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}}$, on voit que $\frac{R}{K} \alpha_x$ est encore une fonction de λ seul, c'est-à-dire de :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{x} \cdot \frac{1}{Pe}}.$$

Quant λ est petit et tend vers 0, les deux séries, numérateur et dénominateur, deviennent équivalentes à leurs premiers termes, et on voit que α_x a pour limite :

$$\frac{\mu_1^2}{4} \cdot \frac{K}{R} = 3,658 \cdot \frac{K}{D}.$$

Il s'en approche à 1 p. 100 près pour $\lambda < 3$, ou pour $\frac{a^2}{VD} \cdot \frac{x}{D} > \frac{1}{36}$ environ.

Nusselt, considérant un tube de longueur indéfinie, et faisant varier x seul, constate alors que ce tube peut être divisé en deux zones : la première, voisine de l'origine, où les échanges de chaleur et les répartitions de température dans une section sont encore sous l'influence des

conditions initiales ; la seconde, où cette influence a disparu, correspond au cas où l'on peut négliger tous les termes des différentes séries, sauf le premier. Dans ce

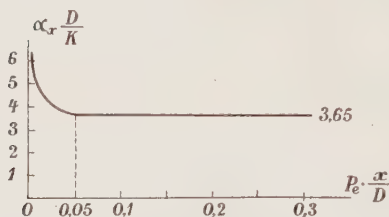


FIG. 10. — Variation de α_x avec x d'après Groeber.

dernier cas le coefficient de convection α_x est constant, indépendant de la vitesse. La courbe de α_x en fonction de x présente d'abord une partie rapidement décroissante, puis une partie sensiblement rectiligne et

parallèle à l'axe des x . Les mêmes conclusions auraient pu être faites pour les deux problèmes traités précédemment. On trouvera ci-contre la courbe de α_x , d'après Groeber. Nusselt, avec sa définition différente de t_m , trouve :

$$\limite \alpha_x = 3,152 \cdot \frac{K}{D}.$$

Là s'arrête l'analyse de Nusselt et de Groeber qui n'ont pas étudié la variation de α_x pour des vitesses plus grandes que celles fournies par $\lambda < 3$, et qui n'ont pas non plus considéré les coefficients moyens de convection.

Le coefficient moyen $\alpha'_{0,x}$ sera défini par :

$$(93) \quad \alpha'_{0,x} = \frac{\int_0^x Q dx}{\int_0^x t_m - t_0 \cdot dx}$$

$$= \frac{K}{4R} \times \frac{\frac{1,498}{\mu_1^2} \left(1 - e^{-\frac{\mu_1^2}{\lambda^2}}\right) + \frac{1,114}{\mu_2^2} \left(1 - e^{-\frac{\mu_2^2}{\lambda^2}}\right) + \frac{0,503}{\mu_3^2} \left(1 - e^{-\frac{\mu_3^2}{\lambda^2}}\right) + \dots}{\frac{1,498}{\mu_1^4} \left(1 - e^{-\frac{\mu_1^2}{\lambda^2}}\right) + \frac{1,114}{\mu_2^4} \left(1 - e^{-\frac{\mu_2^2}{\lambda^2}}\right) + \frac{0,503}{\mu_3^4} \left(1 - e^{-\frac{\mu_3^2}{\lambda^2}}\right) + \dots}$$

qui est la définition la plus rationnelle.

Pour λ petit, α_0^x tend vers :

$$\frac{K}{4R} \times \frac{\frac{1,498}{\mu_1^2} + \dots}{\frac{1,498}{\mu_1^4} + \dots} = \frac{K}{4R} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1,498}{\mu_1^4} + \dots} = 2,18 \frac{K}{R} = 4,36 \frac{K}{D}.$$

L'autre définition, celle de α_0^x , donnera :

$$\alpha_0^x = \frac{Rc\rho V}{x} \times \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{1 + \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}},$$

d'où :

$$(94) \quad \alpha_0^x = \frac{Rc\rho V}{x} \cdot \frac{1 - G(\lambda)}{1 + G(\lambda)}.$$

avec :

$$G(\lambda) = -4 \sum_1^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k} e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2}} \cdot \varphi'(\mu_k, \mu_k) \\ = +4 \left[\frac{1,498}{\mu_1^2} e^{-\frac{\mu_1^2}{\lambda^2}} + \frac{1,114}{\mu_2^2} e^{-\frac{\mu_2^2}{\lambda^2}} + \frac{0,503}{\mu_3^2} e^{-\frac{\mu_3^2}{\lambda^2}} + \dots \right],$$

ou encore :

$$(94') \quad \alpha_0^x \cdot \frac{R}{K} = \lambda^2 \frac{1 - G(\lambda)}{1 + G(\lambda)}.$$

On voit que pour λ petit ($\lambda < 1$ par exemple), α_0^x varie sensiblement comme λ^2 , car $G(\lambda)$ est petit, de l'ordre de $1/1.000$. Donc, pour $\lambda < 1$, α_0^x varie proportionnellement à la vitesse.

Valeur asymptotique des coefficients de convection pour λ grand. — Voyons comment α_0^x varie quand λ augmente. La méthode employée jusqu'ici pour faire la somme de la série qui entre dans l'expression du coefficient de convection, ne réussit plus, en raison de la connaissance insuffisante des racines μ_k et des coefficients. Cette série $G(\lambda)$ converge un peu plus vite que précédemment.

Pour surmonter cette difficulté théorique assez grande, nous allons calculer directement la valeur asymptotique de α_0^x pour λ très grand, par une méthode analogue à celle de Boussinesq. Mais d'ores et déjà nous pouvons affirmer que α_0^x croîtra moins vite que $\sqrt{V}$. En effet, à partir d'une certaine valeur de λ , l'épaisseur du fluide affectée par les échanges de chaleur devient inférieure au rayon du tube; quand λ augmente encore, cette épaisseur diminue. Or, il est bien évident que les valeurs de la vitesse qui influent sur α sont seulement celles qui se trouvent dans cette zone voisine de la paroi. Cette zone diminuant d'épaisseur tandis que λ augmente, ces valeurs de v deviennent de plus en plus petites par rapport à la

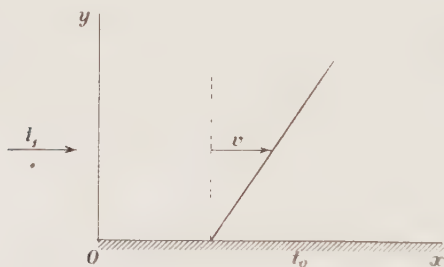


FIG. 11. — Le plateau avec mouvement de Poiseuille.

vitesse maximum. Quand la vitesse était constante dans la section, il ne se passait rien de semblable. Donc, le coefficient, de convection doit croître avec V , mais proportionnellement à une puissance de V inférieure à $1/2$. Une conclusion tout à fait analogue est valable pour le problème du double plateau avec mouvement de Poiseuille (la répartition des vitesses est encore parabolique).

Supposons donc que λ (ou : V) soit assez grand pour que l'épaisseur fluide échauffée soit nettement plus petite que le rayon du tube, à tel point que l'on puisse négliger la courbure de la paroi intérieure et supposer.

constante la température axiale. Nous aurons alors sensiblement le problème suivant. Un fluide indéfini vers les y positifs et de température t_1 vient au contact d'un plateau à la température t_0 , qui occupe le plan zOx du côté des x positifs. La vitesse du fluide n'est plus, comme précédemment, uniforme et parallèle à Ox , mais suit la loi de Poiseuille. D'après cette loi, la vitesse y , nulle pour $y = 0$, est proportionnelle à y . En effet, d'après l'équation (84) on a, en remplaçant y par $R - y$ afin de satisfaire au changement d'ordonnée :

$$v = V \left[1 - \left(\frac{R - y}{R} \right)^2 \right] = V \cdot \frac{y}{R} \left(2 - \frac{y}{R} \right).$$

Quand $\frac{y}{R}$ est petit, ce que nous avons supposé, on peut écrire approximativement :

$$v = \frac{2V}{R} y = \beta y,$$

β étant une constante.

L'équation du problème sera donc, en négligeant toujours $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$:

$$(95) \quad a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \beta y \frac{\partial t}{\partial x};$$

Et les conditions initiales et aux limites :

Pour	$y = 0$	et	$x > 0$	$t = t_0$;
Pour	$y = +\infty$	et	x quelconque :	$t = t_1$;
Pour	$x \leq 0$,		$t = t_1$ partout.	

On voit qu'on y satisfera avec une solution de la forme :

$$t = (t_0 - t_1) \psi \left(\frac{y}{x^n} \right) + t_1,$$

où

$$\begin{cases} \psi(\infty) = 0, \\ \psi(0) = 1, \end{cases}$$

et valable pour $x > 0$ et $y > 0$.

Portant cette expression dans l'équation 85, on trouve :

$$\frac{a^2}{x^{2n}} \cdot \psi'' = -\beta y \cdot y \frac{n}{x^{n+1}} \cdot \psi'.$$

Cette équation contiendra seulement la variable $u = \frac{y}{x^n}$, si on a :

$$\frac{y^2}{x^{1-n}} = u^2,$$

ou si :

$$1 - n = 2n, \quad \text{d'où :} \quad n = \frac{1}{3}.$$

Il restera alors à résoudre l'équation différentielle en ψ' :

$$\psi'' + \frac{\beta}{3a^2} u^2 \psi' = 0,$$

d'où on tire :

$$\psi' = -Ae^{-\frac{\beta}{9a^2} u^3},$$

et :

$$\psi = A \int_u^\infty e^{-\frac{\beta}{9a^2} u^3} \cdot du,$$

car ψ s'annule pour $u = \infty$. La constante A est donnée par :

$$\psi(0) = 1 = A \int_0^\infty e^{-\frac{\beta}{9a^2} u^3} du.$$

Alors on a la solution du problème :

$$(96) \quad \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = A \int_{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}^\infty e^{-\frac{\beta}{9a^2} u^3} \cdot du = \frac{1}{\int_y^\infty e^{-\omega^3} d\omega} \cdot \int_y^\infty \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2 x}} e^{-\omega^3} d\omega.$$

Le flux de chaleur par unité de surface et de temps est, en supposant $t_1 > t_0$:

$$(96') \quad Q = K \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = + \frac{K}{l_3} (t_1 - t_0) \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2 x}}.$$

Nous avons posé :

$$I_3 = \int_0^\infty e^{-\omega^3} d\omega.$$

Le coefficient vrai de convection est égal à :

$$(97) \quad \alpha_x = \frac{Q}{t_1 - t_0} = \frac{K}{I_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2x}} = \frac{1}{I_3 \sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{K^2 c \rho \beta}{x}}.$$

Le flux total de 0 à x est :

$$(97') \quad \int_0^x Q dx = \frac{3}{2} \frac{K}{I_3} (t_1 - t_0) \sqrt[3]{\frac{\beta x^2}{9a^2}} = \frac{3}{2} Qx,$$

et le coefficient moyen de convection :

$$\alpha_{0,x} = \frac{3}{2} \alpha_x = \frac{\sqrt[3]{3}}{2I_3} \sqrt[3]{\frac{K^2 c \rho \beta}{x}}.$$

Le coefficient de convection est donc proportionnel à $\sqrt[3]{\beta}$, c'est-à-dire à la racine cubique de la vitesse.

On peut encore écrire, en remplaçant β par sa valeur $\frac{2V}{R}$ relative au problème primitif :

$$\alpha_{0,x} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2I_3} \cdot \frac{K}{R} \cdot \sqrt[3]{\frac{R}{x} \cdot \frac{2VR}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{I_3} \cdot \frac{K}{R} \cdot \lambda^{\frac{2}{3}}; \quad \left(\text{avec } \lambda = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}} \right),$$

forme qui met en évidence les invariants d'homogénéité.

Cette formule est encore valable pour λ grand en mouvement tranquille, quelle que soit la loi de variation de la vitesse dans la section, pourvu que la courbe représentative de cette vitesse tombe à zéro à la paroi avec un coefficient angulaire fini et différent de zéro.

L'épaisseur de la couche fluide influencée, par les échanges de chaleur étant définie par celle qui réduit $\frac{\partial t}{\partial y}$ au dixième de sa valeur à la surface, on aura pour son

expression l'équation :

$$\frac{\beta}{9a^2} \wedge \frac{y^3}{x} - \frac{1}{\log e} = 2,3.$$

La formule (97) sera approximative pour un tube si la valeur de y ainsi obtenue est, par exemple, inférieure à $\frac{R}{2}$, ou si :

$$\frac{2,3 \times 9a^2x}{\beta R^3} < \frac{1}{8}, \quad \text{ou} \quad \lambda > 9 \text{ environ.}$$

Nous sommes alors en mesure de tracer approximativement la courbe des valeurs de $\alpha_0^x \cdot \frac{K}{R}$ donnée par la formule (94'), pour $\lambda < 1$ et pour $\lambda > 9$, et de façon presque aussi satisfaisante que pour les deux problèmes précédents.

Ce problème correspond au cas réel du fluide visqueux avec une vitesse moyenne V_m inférieure à la vitesse critique de Reynolds. Cette dernière croissant proportionnellement au coefficient de viscosité η , on voit que la proportionnalité de α à $\sqrt[3]{V}$ pourra être observée expérimentalement quand η sera assez grand.

En effet, des deux inégalités :

$$\frac{2\rho R V_m}{\eta} < 2.000, \quad \text{et} \quad \frac{R}{a} \sqrt{\frac{2V_m}{x}} > 9,$$

on tire, éliminant V_m , la condition nécessaire :

$$\eta > \frac{81}{2.000} \rho a^2 \frac{x}{R}.$$

inégalité généralement réalisée pour l'eau ; mais dans ce cas la vitesse critique est faible :

$$V_c = 0^m,36 \quad \text{pour} \quad R = 1 \text{ centimètre, à } 0^\circ,$$

car :

$$\tau_0 = 183 \cdot 40^{-6} \cdot 9,81 \cdot 3.600 \left(\frac{\text{Kgr. masse}}{\text{mètre-heure}} \right).$$

Pour V_m supérieur à V_c , la théorie ne s'applique plus, et les derniers résultats sont plus éloignés de la réalité que ceux que l'on obtient avec les formules des deux premiers problèmes; c'est que les hypothèses faites sur la répartition des vitesses se rapprochent moins des résultats expérimentaux que pour ces deux problèmes. Ceci montre également l'influence considérable du phénomène de la turbulence, qui rend la répartition des vitesses dans une section, voisine d'une répartition uniforme, et diminue l'intérêt de ce dernier problème, traité en vue de son extension aux cas de la pratique. Malheureusement il est impossible de résoudre un problème aussi complexe que celui du mouvement tourbillonnaire à l'intérieur d'un tube et, par suite, de résoudre le problème connexe de transmission de chaleur.

Nous pouvons généraliser la solution de l'équation (95) pour le cas où la température du plateau n'est pas uniforme, mais donnée par :

$$t_0 - t_1 = \varphi(x).$$

On vérifie en effet que la solution du problème, satisfaisant aux conditions initiales, est alors, avec $\beta = \frac{2V}{R}$:

$$(98) \quad t - t_1 = \frac{1}{13} \int_0^\infty \varphi \left(x - \frac{\beta}{a^2} \frac{y^3}{9\mu^3} \right) e^{-\mu^3} d\mu.$$

[On a : $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$.]

(Pour vérifier cette formule, on forme $\frac{\partial t}{\partial y}$, on pose

$\frac{y}{\mu} = \gamma$, on dérive encore en y , et on revient à la variable μ d'intégration).

Le flux par unité de surface est, supposant toujours $t_1 > t_0$:

$$Q = +K \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_0 = -\frac{3K}{I_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2}} \cdot \int_0^\infty \varphi'(x - \omega^3) \omega d\omega = -\alpha_x \times \varphi(x),$$

et le flux total :

$$(99) \quad \int_0^x Q dx = -\frac{3K}{I_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2}} \int_0^\infty \varphi(x - \omega^3) \omega d\omega.$$

Pour tenir compte de la discontinuité de $\varphi'(x)$ pour $x = 0$, il faut écrire :

$$(100) \quad Q = -\frac{3K}{I_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2}} \left[\int_0^{\sqrt[3]{x-\varepsilon}} \varphi'(x - \omega^3) \omega d\omega + \int_0^\varepsilon \varphi'(u) \frac{du}{3\sqrt[3]{x-u}} \right] \\ = -\frac{3K}{I_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2}} \left[\frac{\varphi_0}{3\sqrt[3]{x}} + \int_0^{\sqrt[3]{x-\varepsilon}} \varphi'(x - \omega^3) \omega d\omega \right].$$

ε étant infiniment petit, en posant :

$$\varphi_0 = \varphi(\varepsilon) = (t_0 - t_1)_{x=0}.$$

4° Solution approximative des trois problèmes précédents dans le cas où la température de la paroi n'est pas uniforme.

Nous avons supposé jusqu'ici que t_0 , température de la paroi, était une constante, sauf pour le cas simplifié du plateau.

La méthode suivie alors ne convient plus pour t_0 variable avec x . Mais nous pouvons donner du problème du tube cylindrique circulaire ou du double plateau une solution approchée valable au moins pour le domaine où la formule simple de proportionnalité à $\sqrt[3]{V}$ ou à $\sqrt[3]{\bar{V}}$ s'applique. Cette solution est rigoureuse avec le plateau simple.

A) Si la vitesse v suit la loi de Poiseuille, nous pou-

vons appliquer les dernières formules établies (98) à (100) en posant $t_0 - t_1 = \varphi(x)$ comme loi de variation de t_0 sur la paroi.

Alors on a (si $t_1 > t_0$) :

$$(100') \quad Q = \frac{K}{l_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2x}} \left[-3 \sqrt[3]{x} \int_0^{\sqrt[3]{x-\varepsilon}} \varphi'(x - \omega^3) \omega d\omega - \varphi_0 \right].$$

Tout se passe comme si le coefficient de convection était encore :

$$\alpha_x = \frac{K}{l_3} \sqrt[3]{\frac{\beta}{9a^2x}},$$

comme dans la formule (96'), la différence $t_1 - t_0$ étant remplacée par l'expression entre crochets. Pour calculer Q , on utilisera donc la formule (97) tout comme si t_0 était constant, mais dans l'expression du facteur $(t_1 - t_0)$, on remplacera t_0 par l'expression :

$$(101) \quad t'_0(x) = t_0(0) + 3 \sqrt[3]{x} \int_0^{\sqrt[3]{x-\varepsilon}} \varphi'(x - \omega^3) \omega d\omega,$$

et on écrira :

$$Q = \alpha_x \cdot (t_m - t'_0).$$

t_m étant la température moyenne réelle définie par (91).

Si $\varphi'(x) < 0$, c'est-à-dire si $(t_1 - t_0)$ croît avec x , on voit qu'on aura :

$$t'_0(x) < t_0(x) \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Si de plus $t_1 - t_0 > 0$, il en résultera une augmentation de l'activité des échanges de chaleur. Si au contraire $\varphi'(x) > 0$, on aura :

$$t'_0(x) > t_0(x) \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

ce qui ralentira les échanges pourvu que $t_1 - t_0$ soit positif.

Dans l'hypothèse d'une variation linéaire :

$$t_0(x) = t_0(0) + \gamma \cdot x,$$

on aura à remplacer $t_0(x)$ par l'expression suivante tirée de (101) :

$$t'_0(x) = t_0(0) + \frac{3}{2} \gamma x = t_0(x) + \frac{1}{2} [t_0(x) - t_0(0)].$$

La température fictive de paroi servant à calculer les échanges de chaleur aura donc la même valeur que la température réelle t_0 pour $x = 0$, mais elle variera une fois et demie plus vite que t_0 .

Pour calculer le flux total de chaleur sur la longueur x pour une largeur unité, on pourra de manière analogue utiliser la formule (97'), à condition de remplacer t_0 dans le facteur $(t_1 - t_0)$ par une certaine moyenne t'_{0m} convenablement choisie au moyen de la formule (99), qui donne :

$$(102) \quad t'_{0m} = t_1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \varphi(x - \omega^3) \omega d\omega;$$

on aura alors :

$$\int_0^x Q dx = x a_0^c (t_{1m} - t'_{0m}),$$

t_{1m} étant la température moyenne du fluide sur la longueur x . On peut prendre :

$$t_{1m} = \frac{t_1 + t_m}{2},$$

ou mieux :

$$t_{1m} = \frac{1}{x} \int_0^x t_m dx.$$

Si t_0 varie linéairement en x , on choisira :

$$t'_{0m} = t_0(0) + \frac{3}{5} \gamma x,$$

et non la moyenne arithmétique :

$$t_{0m} = t_0(0) + \frac{1}{2} \gamma x,$$

B) *Si la vitesse est uniforme et égale à V dans une section*, et s'il s'agit du double plateau ou du tube circulaire, on trouve, en appliquant les formules de Boussinesq pour le plateau simple, des résultats tout à fait analogues.

Pour calculer Q, on continuera à utiliser les valeurs de α_x données au cours des problèmes (1°) et (2°) ci-dessus mais on remplacera dans l'expression $(t_m - t_0)$ les valeurs réelles de $t_0(x)$ à la surface intérieure par des valeurs fictives définies en partant de l'équation (29') :

$$(401') \quad t'_0(x) = t_0(0) + 2\sqrt{x} \int_0^{\sqrt{x-\epsilon}} \varphi'(x-\omega^2) d\omega,$$

et on écrira :

$$Q = \alpha_x \cdot (t_m - t'_0),$$

t_m étant la température moyenne réelle dans une section définie par (59) ou par (76').

Il résulte de ceci que $t'_0(x)$ s'écarte davantage de $t_0(0)$ que $t_0(x)$, quand $\varphi'(x)$ conserve un signe constant.

Si on a :

$$t_0(x) = t_0(0) + \gamma \cdot x,$$

alors :

$$t'_0(x) = t_0(0) + 2\gamma \cdot x = t_0(x) + [t_0(x) - t_0(0)].$$

La correction à faire ici est plus grande que précédemment : la température fictive t'_0 varie deux fois plus vite que t_0 .

Le flux total de chaleur sur la longueur x pour une largeur égale à l'unité sera donné par la formule :

$$\int_0^x Q dx = x \cdot \alpha_0^x (t_{1m} - t'_{0m}),$$

en appelant t'_{0m} une moyenne de t_0 calculée à l'aide de la formule (31) :

$$(102') \quad t'_{0m} = t_1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \varphi(x - \omega^2) d\omega,$$

et t_{1m} la température moyenne du fluide sur la longueur x définie par

$$t_{1m} = \frac{t_1 + t_m}{2},$$

ou par :

$$t_{1m} = \frac{1}{x} \int_0^x t_m dx.$$

suivant la définition choisie pour α_0^x .

Si t_0 varie linéairement en x , on aura pour la valeur de cette moyenne :

$$t'_{0m} = t_0(0) + \frac{2}{3} \gamma x = \frac{t_0(0) + 2 \cdot t_0(x)}{3}.$$

En définitive, on voit que les calculs faits avec l'hypothèse d'une température constante de la paroi, donnent pour les coefficients de convection α_x et α_0^x des formules qui sont applicables quand cette température est variable avec l'abscisse x comptée dans la direction de la vitesse du fluide, à condition de remplacer dans l'expression de Q , la valeur réelle de cette température au point x par une valeur fictive parfaitement définie par l'équation (101) ou l'équation (101'), et de calculer le flux total à l'aide d'une moyenne de t_0 donnée par (102) ou par (102').

Ces considérations simples sont susceptibles de rendre des services aux expérimentateurs, car les deux cas, t_0 constant et t_0 variable, se rencontrent également dans la pratique. Elles montrent, en particulier, que les coefficients de convection mesurés dans une circulation à contre-courant (expériences de Jordan par exemple) seront plus élevés que si t_0 est constant (expériences de

Nüsselt avec un tube porté à 100° par la vapeur d'eau), et que cela ne sera pas dû à une erreur systématique, mais à une cause théorique. *Si la température de la paroi varie avec x croissant dans un sens tel qu'elle ait pour effet de tendre à augmenter l'écart avec la température du fluide, le flux de chaleur se trouve augmenté, non seulement à cause de cet écart accru, mais parce que le coefficient réel de convection est lui-même plus grand. Si au contraire la variation de t_0 tend à diminuer cet écart, le flux de chaleur se trouve diminué, non seulement parce que $|t_0 - t_1|$ est plus petit, mais encore parce que le coefficient réel de convection est lui-même diminué.*

Ce sont du reste les relations (101') et (102') qu'il faudra utiliser dans le cas du mouvement turbulent, en première approximation, car la loi de proportionnalité à $\sqrt{V}$ est plus voisine de la réalité que celle à $\sqrt[3]{V}$. Boussinesq avait remarqué dans sa théorie du plateau, que « chaque saut de la température sur le plan du plateau, en amont du point considéré où l'on évalue le flux, contribue à ce flux, pour une part proportionnelle au saut lui-même et inverse de la racine carrée de la distance à laquelle il se produit », ce que l'équation (29') exprime. Nous préciserons plus loin comment il convient de se servir des formules (101') et (102') dans le cas d'un mouvement turbulent.

5° **Extension des résultats ci-dessus quand il existe un potentiel de vitesses.** — Les résultats des deux premiers problèmes, où la vitesse est constante dans une section, se généralisent facilement par les méthodes exposées au début du chapitre au sujet du problème de Boussinesq.

A) *Le problème plan* du double plateau se généralise au cas d'un fluide parcourant tout l'espace compris entre deux parois cylindriques de forme quelconque, de géné-

ratrices parallèles, et avec une vitesse normale à ces génératrices, pourvu que la section d'entrée soit une surface équipotentielle de vitesses. Il suffit de remplacer les coordonnées x et y par ξ et η , $V\xi$ désignant le potentiel des vitesses, avec à l'origine du parcours : $\xi_0 = 0$, et η étant la variable qui définit les lignes de courant par la condition que $\xi + i\eta$ soit une fonction analytique de $x + iy$, et que η prenne des valeurs opposées pour les deux parois. Ainsi on définira une surface médiane. La constante V est du reste arbitraire à un facteur près; on peut prendre par exemple pour V la valeur moyenne de la vitesse sur la surface équipotentielle d'entrée.



FIG. 12. — Le problème plan généralisé avec potentiel de vitesses.

Considérant t comme fonction de ξ et de η , nous aurons les relations déjà écrites : (34), (35), et l'équation du problème :

$$(36') \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right).$$

Le flux par unité de surface est égal à :

$$Q = -K \frac{dt}{dn} = K \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dn} = -K \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{d\xi}{ds},$$

si dn et ds sont les éléments de longueur normal et tangentiel aux lignes de courant, les dérivées étant calculées sur la paroi considérée.

Considérant t_0 , température commune des deux parois,

comme une constante, on aura pour t une solution paire en η et la marche du problème du double plateau sera applicable. En ce qui concerne l'expression de t , on écrira une équation analogue à (57) où x et y seront à remplacer par ξ et η , et Y par η_1 . Avec ces mêmes substitutions (59) donnera $(t_m - t_0)$ calculée sur une surface équipotentielle. L'équation (58) donnera $Q \frac{ds}{d\xi}$;

l'intégration de $Q \frac{ds}{d\xi} d\xi$ fournira le flux total : $\int_0^{s_1} Q ds$, qui a la même valeur pour les deux parois quand on les limite à la même surface équipotentielle.

Finalement, on aura pour la paroi supérieure ($O_1 s_1$) de longueur s_1 , correspondant à ξ_1 , le coefficient moyen de convection :

$$\alpha_0^{s_1} = \frac{\frac{1}{s_1} \int_0^{s_1} Q ds}{\frac{t_1 + t_m}{2} - t_0} = \frac{2\eta_1 c_p V}{s_1} \times \frac{1 - \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)}{1 + \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)},$$

avec

$$\lambda = \frac{\eta_1}{a} \sqrt{\frac{V}{\xi_1}},$$

F étant la série définie par (65) ; ou encore :

$$\alpha_0^{s_1} \cdot \frac{\eta_1}{K} = 2\lambda^2 \cdot \frac{\xi_1}{s_1} \cdot \frac{1 - \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)}{1 + \frac{8}{\pi^2} F\left(\frac{\pi^2}{4\lambda^2}\right)}.$$

Pour $\lambda > \pi$, on peut écrire :

$$(70') \quad \alpha_0^{s_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{K c_p V \xi_1}}{s_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{\eta_1} \sqrt{\frac{\xi_1}{\pi V}}}$$

qui redonne la formule (38) pour λ assez grand et $s_1 = L$.

On obtiendra une formule identique pour le coefficient

moyen de convection $\alpha_0^{s_2}$ correspondant à la paroi inférieure ($O_2 s_2$) de longueur s_2 [il suffit de remplacer s_1 par s_2 dans (70')].

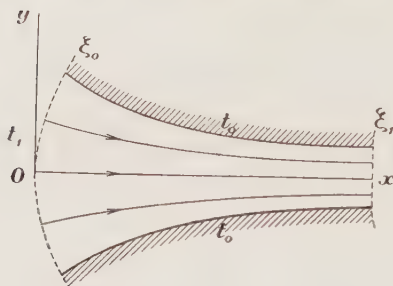


FIG. 13. — Le problème de révolution généralisé avec potentiel de vitesses.

B) *Le problème de révolution* du tube cylindrique circulaire se généralise en considérant un tube de révolution, mais de forme quelconque. Par raison de symétrie, nous n'aurons toujours que deux variables x et y . Nous

remplacerons ces variables par ξ et η , $V\xi$ étant le potentiel des vitesses, et η désignant les lignes de courant définies par :

$$d\eta = y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx \right)$$

et par la condition :

$$\eta = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ axe } Ox.$$

On écrira les relations (44) et l'équation (46).

Faisant les mêmes hypothèses simplificatrices, ce qui suppose les valeurs de y à la paroi, grandes par rapport à l'épaisseur de la couche fluide échauffée, on arrivera à l'équation approchée :

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{a^2}{V} \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2}$$

en posant $\xi' = \int_{\xi_0}^{\xi} y^2 d\xi$, calculé sur la surface du tube.

L'assimilation au problème du tube circulaire est donc incomplète, et, contrairement au cas précédent, les for-

mules du tube circulaire ne peuvent pas se généraliser au cas du tube de révolution quelconque. Par contre, nous avons vu que la méthode de Boussinesq devient applicable quand l'inégalité (53') est vérifiée pour toute valeur de y :

$$y > 30 \cdot a \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{V}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{a} \sqrt{\frac{V}{\xi_1 - \xi_0}} > 30,$$

ξ_1 désignant la valeur maxima de ξ .

On peut écrire dans ce cas, si t_0 est une constante :

$$\alpha_0^s = \frac{4}{S} \sqrt{\pi K c p V \xi_1},$$

S étant l'aire totale balayée sur le tube entre ξ_0 et ξ_1 .

C) Ce résultat s'étend sans difficulté à un *tube de forme quelconque* parcouru par un courant animé d'un mouvement permanent à potentiel de vitesses, et de la même façon que le problème de Boussinesq relatif au solide de révolution, pourvu que l'entrée du tube soit limitée par une surface équipotentielle, ainsi que sa sortie, et que les courbures ne soient pas trop brusques ; ξ'_1 se définit de façon identique.

CHAPITRE VI.

EXAMEN ET INTERPRÉTATION DES PRINCIPAUX
TRAVAUX SUR LA TRANSMISSION DE
CHALEUR PAR CONVECTION.

1° Le problème du refroidissement dans un fluide au repos. — Les considérations d'homogénéité nous ont donné la forme du coefficient moyen de convection :

$$(23) \quad \alpha = \frac{K}{l} \times \psi (Gr, St,$$

avec :

$$Gr = \frac{gl^3 \rho^2 \beta (t_1 - t_0)}{\eta^2} \quad \text{et} \quad St = \frac{K}{c\eta}.$$

Nous n'insisterons pas sur le dispositif expérimental de Dulong et Petit publié en 1837, ni sur celui de Péclet qui a complété leurs recherches. Nous dirons simplement que les premiers opéraient avec un thermomètre à gros réservoir sphérique; celui-ci, servant de corps chaud, était plongé au centre d'un ballon sphérique immergé dans l'eau et échauffé à des températures variant de 0° à 250° environ. La chaleur transmise par convection s'obtenait par différence, en déterminant séparément le rayonnement au moyen d'une expérience exécutée après avoir fait le vide dans le ballon. Péclet opérait avec divers corps (sphères, cylindres) plongés dans une enceinte et remplis d'eau continuellement agitée, dans laquelle un thermomètre donnait la vitesse du refroidissement (voir le Traité de Ser). La loi obtenue peut se mettre approximativement sous la forme :

$$\alpha = B \cdot [\rho^2 (t_1 - t_0)]^{0.233}$$

obtenue en remplaçant la pression p par la masse spécifique ρ , ce qui fait apparaître une partie du groupement Gr (nombre de Grashof).

M. Boussinesq, en 1903, reprenant cette formule avec l'aide des considérations d'homogénéité, montra que α pouvait être représenté par :

$$\alpha = [gKc^2\rho^{2\beta}(t_1 - t_0)]^{\frac{1}{3}} \times A = A \cdot \frac{K}{l} \cdot \left(\frac{Gr}{St^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

A dépendant de la forme, de la disposition du corps, et un peu des dimensions. La courbure étant favorable aux échanges de chaleur, la diminution des dimensions sans changement de forme ni de disposition, a pour effet d'augmenter α un peu. Par suite, A doit décroître quand les dimensions augmentent, ce qu'il exprime dans la formule ci-dessus en remplaçant l'exposant $1/3$ par un exposant un peu plus faible, par exemple : $0,333 - 0,1 = 0,233$, l'exposant de Dulong et Petit. Ceci est bien conforme aux considérations d'homogénéité pour le cas d'un fluide non visqueux. (L'exposant $1/3$ est celui qui fait disparaître la longueur l dans l'expression de α .)

On obtient ainsi dans ce cas, la formule simple :

$$(103) \quad \alpha = A \cdot \frac{K}{l} \left(\frac{Gr}{St^2}\right)^n \quad \text{avec} \quad 0 < n < \frac{1}{3}.$$

Les expériences directes suivantes ont été faites avec des *cylindres horizontaux plongés dans l'air* :

A) Kennelly, Wright et Bylevelt (1909) ont opéré avec des fils de cuivre de diamètres respectifs : $0^{\text{mm}},1143$, $0^{\text{mm}},2616$ et $0^{\text{mm}},6907$; la température extérieure était approximativement de 18° centigrades, la température superficielle a varié de 36° à 198° avec une pression de 15 à 150 centimètres de mercure.

B) Langmuir (1912) opéra avec des fils de platine

portés à une température de 107° à 1.600° ; la température de l'air étant environ de 27° , et la pression : 75 centimètres de mercure. Les diamètres étaient en millimètres : 0,404-0,1264-0,2508-0,5100.

C) Bylevelt (1915) reprit la question avec le nickel et le tantale, pour : $t_1 = 48^{\circ},6$ à $168^{\circ},3$, et $t_0 = 17^{\circ}$ à 21° , et à la pression atmosphérique; les diamètres des fils étaient de $0^{\text{mm}},043$ et 1 millimètre.

D) Wamsler (1911) se plaça dans une zone différente d'expérimentation en étudiant spécialement le refroidissement des tuyaux de vapeur. Il opéra avec des tuyaux

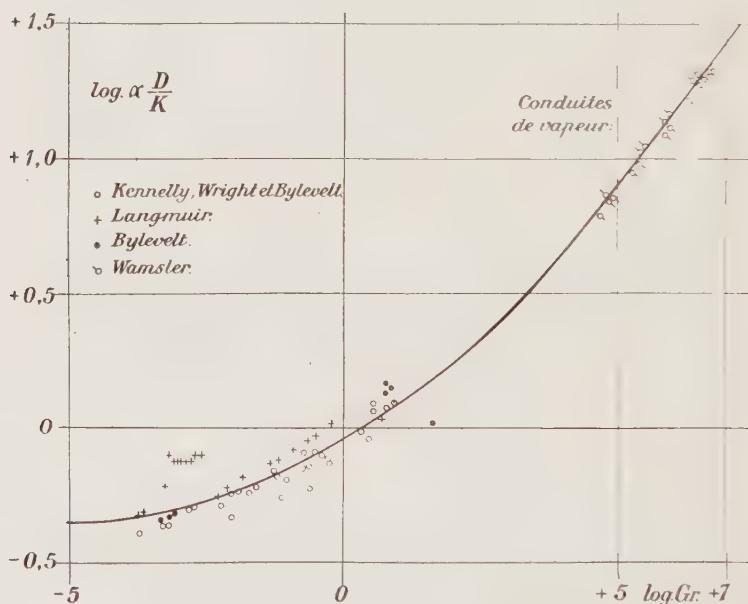


FIG. 14. — Lois du refroidissement d'un cylindre horizontal dans l'air calme (d'après Groeber).

horizontaux en fer forgé, de diamètres extérieurs : $20^{\text{mm}},5$, 33 millimètres, 48 millimètres, 76 millimètres et 89 milli-

mètres en faisant varier t_0 de 16° à 29° , et t_1 de 56 à 238° , à la pression de 715 millimètres de mercure.

Si on porte sur un graphique l'ensemble de ces expériences, en portant en abscisses : $\log (Gr)$, et en ordonnées : $\log \left(\alpha \frac{D}{K} \right)$; on obtient la courbe ci-jointe d'après Groeber (*fig. 14*). Si on avait pris comme abscisse $\log \left(\frac{Gr}{St^2} \right)$, on aurait obtenu sensiblement la même allure,

car le nombre de Stanton $\frac{K}{c\eta}$ varie très peu avec la température (pour les gaz, les variations de K et de η sont notables, mais à peu près proportionnelles, et c varie peu). Ainsi, pour l'air, la valeur de St passe de 1,41 à 1,44 environ quand la température croît de 0° à 500° . Pour la vapeur d'eau, St est voisin de 1,28. Ceci est confirmé par la théorie cinétique des gaz et la thermodynamique ; on a en effet, ε et α étant deux constantes :

$$K = \varepsilon \cdot c_v \cdot \eta, \quad \text{et} \quad \frac{c_p}{c_v} = \alpha,$$

pour tous les gaz, ε et α variant seulement avec le nombre d'atomes dans la molécule (c_v , chaleur spécifique à volume constant).

En particulier, pour un gaz parfait déterminé.

$$St = \frac{K}{c_p \eta} = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

est une constante théorique indépendante de la température.

On voit sur le graphique que l'exposant n de la formule (103) est inférieur à $1/4$ et diminue quand Gr diminue.

Dans la zone des expériences sur les tuyauteries hori-

zontales de vapeur on peut écrire approximativement :

$$(104) \quad \alpha \frac{D}{K} = 0,468 \cdot (Gr)^{\frac{1}{4}},$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = 0,468 \cdot K \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} \cdot \left[\frac{g(t_1 - t_0)}{D \cdot T_m} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Cette formule diffère un peu de celle de Groeber, en apparence, mais c'est uniquement parce que les unités fondamentales que nous avons prises ne sont pas les mêmes. Nous avons choisi la masse, et non le poids, pour l'une de ces trois unités. C'est ainsi que St n'a pas non plus la même forme, à cause du facteur g qui disparaît au dénominateur. Il est plus logique pour nous de nous conformer aux unités fondamentales du système CGS et du nouveau système pratique MTS, et de tout rapporter à l'unité de masse, et non à l'unité de poids. En particulier, les valeurs de η dans le système kilogramme-poids, mètre, seconde, sont à multiplier par $g = 9,81$ quand on prend le kilogramme-masse comme unité fondamentale.

Avec un cylindre vertical, on aurait pour α des valeurs naturellement plus élevées, car les parois verticales facilitant l'ascension des couches superficielles sont balayées avec des vitesses plus grandes ; le mouvement ascendant s'opérant avec une accélération constante : $\beta g (t - t_0)$, se rapproche d'un mouvement uniformément accéléré de bas en haut. Les expériences précises manquent dans ce cas. Groeber cite une expérience qualitative. Un tuyau vertical était chauffé à son intérieur par des résistances électriques, et de façon uniforme sur toute sa longueur. On mesurait les températures superficielles à diverses hauteurs. On s'attendait à ce que les températures de la partie supérieure fussent plus élevées que celles de la partie inférieure, les couches refroidissantes se trouvant

déjà échauffées quand elles parvenaient en haut. Mais l'expérience prouva le contraire ; le tuyau était moins chaud en haut qu'en bas. Ceci prouve que α est plus grand à la partie supérieure. Groeber en conclut que les filets fluides ne parcourent pas la surface de bas en haut, mais seulement sur une certaine hauteur, la hauteur totale étant partagée en plusieurs étages, et la vitesse étant plus grande en haut qu'en bas. Ceci n'explique pas le phénomène. L'hypothèse du mouvement ascendant uniformément accéléré montre au contraire très simplement que l'accroissement de α est dû à l'augmentation de la vitesse sur le trajet de bas en haut, cette augmentation de vitesse compensant, et au delà, l'effet de l'accroissement d'épaisseur de la couche échauffée.

Les expériences relatées ci-dessus se rapportent à des corps plongés dans l'air. Pétavel (1915-16) et Davis (1922) ont étudié les *lois du refroidissement dans d'autres fluides que l'air*.

Pétavel a fait une première série d'expériences avec des tuyaux de fumée plongés dans l'air, et dont le diamètre a atteint jusqu'à un pied ; la surface était en fer oxydé ; il a fait varier la pression de 1/10 à 100 atmosphères, et l'excès de température a atteint jusqu'à 1.100° ; ses résultats concordent avec les précédents. Il a ensuite étudié le refroidissement d'un fil de 0^{cm},1106 de diamètre, plongé successivement dans l'air, l'hydrogène et l'oxygène ; d'après Davis, ses résultats confirment encore la formule d'homogénéité dans le cas des fluides non visqueux.

Davis lui-même a fait des *essais avec divers liquides visqueux, afin de vérifier la formule* :

$$\alpha = \frac{K}{l} \sqrt[4]{\left(\frac{Gr}{St}\right)}.$$

Pour cela il a utilisé une cuve pleine du liquide à expé-

rimiter, et dans laquelle plonge un fil de platine horizontal parcouru par un courant électrique et faisant partie d'un pont de Wheatstone; il mesurait la résistance du fil et l'intensité du courant, d'où la température et l'énergie dissipée. Il a opéré avec le toluène, le tétrachlorure de carbone, l'aniline, l'huile d'olive et la glycérine, dont les valeurs de $\frac{1}{St} = \frac{c\eta}{K}$ sont croissantes, et il a constaté que

la formule ci-dessus représentait convenablement l'ensemble de ses résultats et concordait avec les essais faits dans l'air (diamètres des fils utilisés : 0^{cm},0083 et 0^{cm},0155). Il a employé ensuite la méthode de Goldschmidt qui consiste à mettre le fil de platine dans l'axe d'un tube horizontal en argent, étroit, et plein du liquide à expérimenter, et à mesurer le courant électrique nécessaire pour maintenir une différence de température donnée entre le fil et les parois du tube. Le tube d'argent, de 2 centimètres de diamètre, et de 12 centimètres de long, était lui-même plongé dans un cylindre massif de cuivre de 5 centimètres de diamètre. Le fil de platine avait 0^{cm},002. Les mesures se faisaient au pont de Wheatstone. Les excès de température, assez faibles, ont atteint 1° à 20°. Avec le toluol, le tétrachlorure de carbone, l'huile d'olive et l'aniline, Davis a trouvé que le coefficient de convection décroît légèrement quand la température augmente (cette température a varié de 15° à 80°), ce qui est confirmé par Rice (décembre 1923) en Amérique.

Citons enfin les expériences de Nüsselt publiées en 1923 dans les *Forschungsarbeiten*, et relatives à l'étude des pertes par rayonnement et convection aux parois des moteurs à explosion. Nüsselt a pris successivement deux récipients sphériques en acier coulé, de 200 et 600 millimètres de diamètres intérieurs respectifs. Il y a brûlé des mélanges gazeux analogues à ceux des moteurs à gaz.

Le refroidissement étant mesuré avec un indicateur

optique, on en déduisait l'ensemble de la chaleur perdue à la paroi. Au moyen de plusieurs expériences avec des surfaces intérieures différentes (surface dorée et surface enduite de noir de fumée par exemple) il a séparé la radiation calorifique de la convection. Après des essais nombreux aux deux bombes, il a trouvé, avec $t_1 = 300^\circ$ environ, et une température extérieure de 15° :

$$\alpha = 0,99 \sqrt[3]{p^2 T} \frac{\text{calories-kgr}}{\text{m}^2 \cdot \text{heure} \cdot \text{degré centigrade}}$$

p étant en atmosphères allemandes, c'est-à-dire en kilogrammes par centimètre carré, la pression intérieure, et T la température absolue du gaz à l'intérieur.

En tenant compte des considérations d'homogénéité, on aura :

$$(105) \quad \alpha = 0,073K \sqrt[3]{\frac{\rho^2 t - t_1}{\eta^2 T_m}},$$

$(t - t_1)$ étant la différence de température entre le gaz et la paroi intérieure, T_m la température absolue moyenne entre t et t_1 ; K , ρ et η , les constantes moyennes du gaz brûlé, données par les formules de Nüsselt :

$$T_m = \frac{t - t_1}{\log \frac{T}{T_1}},$$

le symbole $\log$ désignant les logarithmes népériens ; ρ_m correspondant à T_m :

$$K_m = \frac{1}{T - T_1} \int_{T_1}^T K dT, \quad \text{et} \quad \eta_m = \frac{1}{T - T_1} \int_{T_1}^T \eta dT.$$

La formule (105) est applicable théoriquement au refroidissement de tous les gaz à l'intérieur d'une paroi sphérique. Le choix de l'exposant $1/3$ suppose que l'influence du diamètre est nulle. Pour des parois de formes diffé-

rentes, ou en dehors du domaine des expériences de Nusselt, le coefficient numérique 0,073 serait à modifier, ainsi que cet exposant.

En définitive, le problème du refroidissement est résolu dans quelques cas particuliers. Il faut reconnaître que la solution pratique ne sera jamais susceptible d'une grande précision, en raison de la grande influence des mouvements accidentels de l'air sur le refroidissement. Le moindre mouvement d'ensemble provoqué par une autre cause que la différence de température accélère beaucoup les échanges de chaleur. Ce problème, théoriquement déterminé, est pratiquement mal défini. Dans un certain nombre de cas particuliers, on pourra tout simplement calculer α en supposant un mouvement d'ensemble à vitesse moyenne et appliquer les formules de Boussinesq (exemple : refroidissement extérieur des locaux et bâtiments).

2° **Le problème du corps plongé dans un courant fluide.** — Ce problème très important au point de vue pratique a été très peu expérimenté, du moins de façon systématique et autrement que pour obtenir des formules tout à fait empiriques, comme celle de Rankine pour les chaudières. Nous avons cité les essais de Rietschel et de Thoma, avec des tubes d'eau de chaudières. Quoique le premier n'ait pas fait varier le diamètre des tubes et que le second n'ait pas tenu compte de la densité du gaz, on peut englober tous ces essais dans une même formule exprimée en unités pratiques :

$$(106) \quad \alpha = A \frac{(\rho V)^{0,6}}{D^c},$$

V m/sec. étant la vitesse des gaz normale aux tubes avant le passage entre ces tubes, et D étant exprimé en mètres.

Rietschel avait trouvé 0,59 au lieu de 0,6; la diffé-

rence est très faible ; quant à l'exposant x , il est, d'après Thoma, égal à 0,4 ou à 0,5, suivant que les tubes sont en quinconce ou en ligne.

La formule théorique de Boussinesq donne une forme très voisine :

$$(107) \quad \alpha = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2Kc}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{V\rho}{D}}.$$

Thoma a trouvé :

$$A = \frac{6,9}{\rho^{0,6}}, \quad \text{ou} \quad \frac{3,65}{\rho^{0,6}},$$

suivant que les tubes sont en quinconce ou en ligne.

Rietschel donne :

$$\frac{A}{D^x} = 15,8; 16,9 \text{ ou } 18,40$$

suivant qu'il s'agit de 2, 3 ou 4 rangées de tubes. Comme il avait $D = 0^m,033$, et qu'il mesurait la vitesse à l'endroit le plus étroit (5 millimètres), la valeur de A correspondant à ses expériences en supposant $x = 0,5$ est égale à :

$$A = 15,8 \times \sqrt{0,033} \times \left(\frac{38}{5}\right)^{0,6} = 9,68,$$

pour l'ensemble des deux premières rangées.

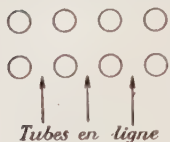
Ces deux séries d'essais s'accordent donc grossièrement. La constante de Boussinesq est égale pour l'air, à 500°, à :

$$A = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2Kc}{\pi}} \times 60 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{0,046 \times 0,255}{1,57}} \times 60 = 6,6,$$

le facteur 60 étant destiné à tenir compte de ce que V sera exprimé en mètres par seconde et non en mètres par heure.

La formule (106) indique donc aux vitesses usuelles un

coefficient α plus élevé de moitié que la théorie; la raison en est dans le régime tourbillonnaire qui se manifeste déjà pour la première rangée de tubes et davantage pour les rangées suivantes. La disposition en quinconce des tubes favorise encore le tourbillonnement.



Tubes en ligne



Tubes en quinconce.

FIG. 45.
Faisceau de tubes.

Si on appelle α_1 le coefficient de convection pour la première rangée, et α_2 le coefficient de convection commun des rangées suivantes le degré de turbulence étant sensiblement le même à partir de la seconde rangée), le coefficient pour l'ensemble des deux premières rangées sera :

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Le coefficient pour les trois premières rangées sera :

$$\alpha_{123} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3},$$

et le coefficient pour n rangées aura pour expression :

$$\alpha_{1\dots n} = \frac{\alpha_1 + (n-1)\alpha_2}{n}.$$

D'après Rietschel, on a :

$$\alpha_{12} = 15,8 \cdot (\rho V')^{0,59};$$

$$\alpha_{123} = 16,9 \cdot (\rho V')^{0,59};$$

$$\alpha_{1234} = 18,1 \cdot (\rho V')^{0,59}.$$

On en tire $\frac{\alpha_1}{(\rho V')^{0,59}} = 11$, et $\frac{\alpha_2}{(\rho V')^{0,59}} = 20$, environ.

Ainsi l'échange de chaleur à partir de la seconde rangée serait presque double de celui de la première rangée

(rayonnement mis à part naturellement) et cela uniquement à cause de la plus grande turbulence du courant fluide.

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES APPROCHÉES SUR LE CALCUL DU COEFFICIENT α . — La formule (107) est applicable au faisceau de tubes quand le mouvement est à potentiel de vitesses sans tourbillons, du moins quand les tubes ne sont pas trop rapprochés les uns des autres, soit dans le sens du mouvement, soit dans le sens perpendiculaire.

Mais il est à prévoir autant de coefficients α que de régimes différents de mouvement. En fait on peut admettre qu'il y a toujours approximativement un potentiel de vitesses, sauf dans une zone avoisinant immédiatement le tube considéré, où se produit le phénomène du film adhérent et des tourbillons. Mais la couche du fluide correspondante est très mince ; son épaisseur dépend de la vitesse du courant.

En effet, on doit écrire que la couche tourbillonnaire a une épaisseur inversement proportionnelle à la vitesse, si on veut mettre d'accord la loi de proportionnalité des forces de viscosité à la première puissance des dérivées des vitesses, et la loi de proportionnalité des forces de frottement contre la surface du tube au carré des vitesses (voir à ce sujet l'*Aérodynamique* de N. Joukowski, 1916). Les données expérimentales fournissent pour cette épaisseur en mètres et pour l'air la valeur $\frac{1}{100V}$, soit : 3 millimètres pour une vitesse de 5 mètres, et 1 millimètre pour une vitesse de 10 mètres à la seconde.

Considérons successivement les deux régimes réels principaux qui peuvent s'établir avec un seul tube :

A) *Le régime à sillage fermé.* — Le tube est pourvu à sa partie antérieure d'un sillage formant une capacité fermée et tourbillonnaire. En dehors de ce sillage, nous

supposons que le mouvement peut être considéré comme possédant un potentiel de vitesses. Les tourbillons fluides enfermés dans cette sorte de petit prisme sont constitués à peu près toujours par les mêmes particules; en raison de leur mouvement très actif, elles prennent sensiblement la température de la paroi du tube, soit t_0 .

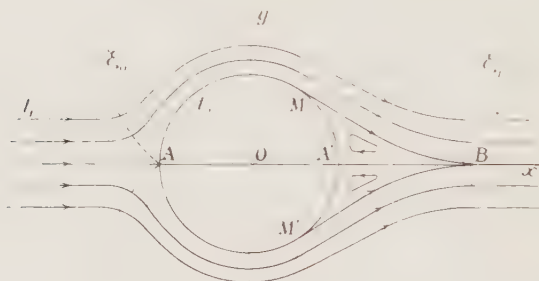


FIG. 16. — Le régime à sillage fermé avec un tube cylindrique.

Tout se passe alors, approximativement, au point de vue de la surface d'échange, comme si le tube avait le contour AMBM'A. La formule de Boussinesq (38) donne alors :

$$(407) \quad \alpha = \frac{4}{\pi D} \sqrt{\frac{Kc_p V (\xi_1 - \xi_0)}{\pi}},$$

$V (\xi_1 - \xi_0)$ étant la variation du potentiel de vitesses sur le parcours AMB.

S'il n'y a pas de sillage, on a $\xi_1 - \xi_0 = 2D$. Ici, $\xi_1 - \xi_0$ est plus grand que $2D$. Remarquons que nous avons mis au dénominateur le périmètre réel πD du tube, et non le périmètre AMBM'A, puisque α est rapporté à l'unité de surface du tube. On voit donc que α est augmenté dans le rapport :

$$\sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_0}{2D}}.$$

Si le sillage est assez long, et si f désigne la flèche, $A'B$ de rapport s'écrit approximativement :

$$\sqrt{1 + \frac{f}{2D}}.$$

Cette considération permet de faire l'accord grossier entre la formule (106) et la formule (107) en ce qui concerne la valeur de la constante A . Quant à l'exposant de V égal à 0,6 au lieu de 0,5, la cause doit en être uniquement dans la turbulence au voisinage de la paroi, par analogie avec le cas de la circulation dans un tube; l'analyse que nous donnerons plus loin des phénomènes de turbulence dans les tubes le montrera.

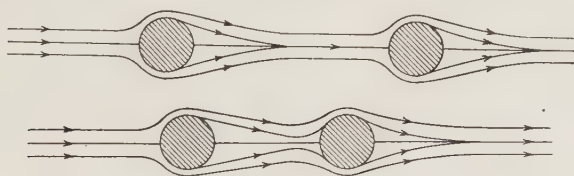


FIG. 17. — Tubes en ligne (en haut, tubes éloignés; en bas, tubes rapprochés.)

Si nous prenons maintenant deux tubes en ligne, α aura la même valeur pour les deux tubes si le sillage du premier n'atteint pas le second; mais il sera plus grand pour l'ensemble des deux tubes que pour le premier supposé isolé, si ce sillage atteint le second tube; il ne faut cependant pas que les deux tubes soient par trop voisins, car une partie de leur surface serait mal utilisée. Le cas le plus favorable est celui où la distance entre eux est juste assez petite pour assurer la continuité du sillage. Alors, en effet, le facteur $(\xi_1 - \xi_0)$ est maximum, et par suite le coefficient de convection α pour l'ensemble des deux tubes l'est aussi. Cette notion de distance optimale des tubes est intéressante au point de vue pratique.

Les considérations ci-dessus sont tout à fait approximatives et ne s'appliquent plus au cas du sillage non fermé.

B) *Le régime à potentiel de vitesses non uniforme* (Joukowski). — Un régime tourbillonnaire simple de vitesses autour de l'axe Oz du tube sera défini par le potentiel de vitesses $\frac{V\Gamma\theta}{2\pi}$, θ étant l'angle (Ox, OM) . Ce potentiel non uniforme varie de IV quand on tourne de 2π sur les lignes de courant, qui sont des cercles concentriques de centre O : la vitesse y est inversement proportionnelle à la distance au centre O .

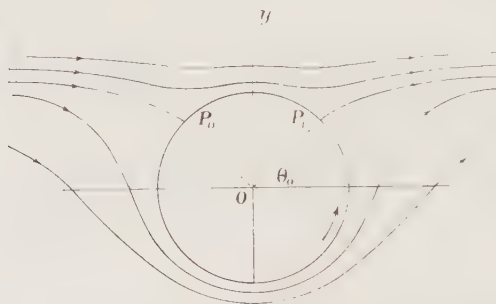


FIG. 18. — Régime de Joukowski avec un tube cylindrique.

Combinons ce régime tourbillonnaire avec le régime tranquille classique défini par le potentiel :

$$Vx \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right);$$

nous obtiendrons un régime à potentiel de vitesses non uniforme, à la Joukowski, défini par l'équation :

$$\text{Potentiel de vitesses : } V\xi = Vx \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{V\Gamma\theta}{2\pi}.$$

Nous aurons ainsi des lignes de courant analogues à celle de la figure ci-dessus, avec deux points critiques P_0 et P_1 définis par :

$$\sin \theta_0 = \frac{1}{4\pi R},$$

pourvu qu'on ait :

$$|I| < 4\pi R.$$

Si au contraire $|I| = 4\pi R$, P_0 et P_1 sont confondus en B. Si enfin $|I| > 4\pi R$, il n'y a plus de points critiques, et le filet central ne quitte pas la surface. C'est généralement dans le premier cas que l'on se trouve. Pour se trouver dans le second ou le troisième, il faut un tourbillon très intense.

Ici le théorème de Boussinesq s'applique aux arcs P_0BP_1 et $P_1B'P_1$.

D'après (37), le flux total sera égal à :

$$F = 2(t_1 - t_0) \sqrt{\frac{Kc\rho V}{\pi}} [\sqrt{\xi_1 - \xi_0} + \sqrt{\xi'_1 - \xi_0}],$$

si ξ_1 et ξ'_1 sont les deux valeurs finales, de ξ au point P_1 , et ξ_0 sa valeur initiale en P_0 . Mais on a :

$$\xi_1 = 2R \cos \theta_0 + I \cdot \frac{\theta_0 - 2\pi}{2\pi};$$

$$\xi'_1 = 2R \cos \theta_0 + I \cdot \frac{\theta_0}{2\pi};$$

$$\xi_0 = -2R \cos \theta_0 + I \cdot \frac{-\pi - \theta_0}{2\pi}.$$

Donc :

$$(108) \quad F = 2(t_1 - t_0) \sqrt{\frac{Kc\rho V}{\pi}} \times \left[\sqrt{4R \cos \theta_0 + I \left(\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2} \right)} + \sqrt{4R \cos \theta_0 + I \left(\frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2} \right)} \right].$$

La quantité entre crochets varie de $4\sqrt{R}$ pour $I = 0$, à $2\sqrt{\pi R}$ pour $|I| = 4\pi R$.

Le flux F diminue donc quand la circulation $|IV|$ de la vitesse augmente autour du cylindre; il est réduit dans le rapport $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ quand $|I|$ passe de 0 à $4\pi R$.

Le mouvement à la Joukowski est donc défavorable à la transmission de chaleur; cela se comprend si on considère que les vitesses ne sont pas augmentées, et que la dissymétrie entre les arcs P_0BP_1 et $P_0B'P_1$ écarte de la disposition optimum les deux courants situés de part et d'autre.

Si on avait $|I| > 4\pi R$, il pourrait ne pas en être de même. Mais alors la théorie de Boussinesq n'est plus applicable, car le même filet fluide tourne indéfiniment autour du cylindre. Néanmoins ce cas paraît beaucoup moins probable que le premier dans les applications. Contrairement à ce qui se passe pour l'étude des lois de la résistance de l'air, l'étude du régime à la Joukowski ne fournit donc pas de conclusion intéressante ici.

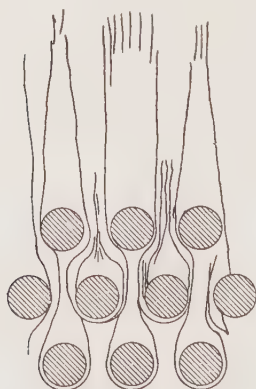


FIG. 19.
Expériences de Thoma.

Thoma a rendu visibles les gaz en mouvement grâce à de la vapeur de chlorure d'ammoniaque. La figure ci-contre indique approximativement l'aspect qu'il a obtenu. Elle montre que le courant ne remplit pas effectivement tout l'espace situé entre les tubes, mais qu'à l'avant de chacun d'eux existe un sillage prononcé. Ceci correspond donc approximativement à notre première hypo-

thèse. Ce sont donc les formules approximatives établies

dans l'hypothèse d'un sillage fermé, qu'il faudra appliquer dans la pratique.

LES ESSAIS DE M. V. KAMMERER. — Après les considérations théoriques ci-dessus, revenons à l'examen des recherches expérimentales. Nous citerons seulement les essais de M. V. Kammerer, ingénieur en chef de l'Association Alsacienne des propriétaires d'appareils à vapeur ; Kammerer a étudié pendant la guerre la transmission de chaleur dans une chaudière ambitubulaire du type Stierle et munie d'un surchauffeur et d'un économiseur.

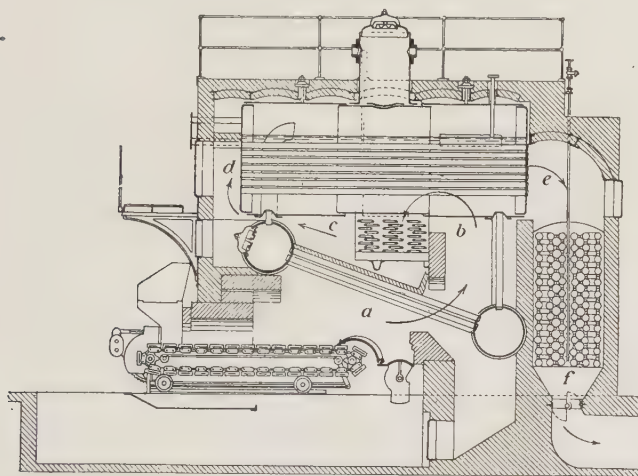


FIG. 20. — Chaudière Stierle de la Société Alsacienne.
Essais de M. Kammerer.

La figure ci-contre représente la chaudière utilisée, qui comporte 62 tubes de fumée de 95 millimètres, et 32 tubes d'eau du même diamètre et de 3^m,20 de long. Le surchauffeur est à cinq serpentins de 35, et l'économiseur, situé dans le carneau descendant, comporte 68 tubes de fonte horizontaux.

Les caractéristiques sont les suivantes :

Surfaces de chauffe.

Chaudière..	{	Grand corps.....	14 ^{m2} ,5
		Tubes de fumée.....	78 ^{m2} ,5
		Tubes d'eau.....	30 ^{m2} ,6
Surchauffeur.....			20 ^{m2} ,0
Réchauffeur d'eau....			6,8 ^{m2} ,0

La chaudière était chauffée avec une grille de 3^{m2},51 à chaîne du type Babcock et Wilcox, avec tirage naturel.

Pour effectuer un essai, on assure une marche de régime aussi régulière que possible pendant huit heures environ ; pendant ce temps on fait les mesures de température et de dépression, et les analyses de gaz. Les températures sont mesurées sur le trajet des gaz successivement en (b), (c), (d), (e) et (f), c'est-à-dire avant et après les tubes d'eau, le surchauffeur, les tubes de fumée et l'économiseur, de façon à permettre d'évaluer la quantité de chaleur absorbée par chacun de ces appareils. On se sert de pyromètres thermo-électriques fer-constantan et de pyromètres à résistance de platine. Par ailleurs on mesure la quantité de combustible consommée, les mâche-fers, les cendres ; on détermine le pouvoir calorifique inférieur du charbon et la teneur des cendres en imbrûlés. Enfin, on mesure la quantité d'eau vaporisée, la pression à la chaudière, la température de l'eau à l'entrée et à la sortie du réchauffeur, la température de surchauffe, la température initiale de l'air de combustion, son humidité ; l'analyse du combustible en humidité, cendres, carbone fixe, carbone total, hydrogène, matières volatiles (ceci afin de calculer la chaleur spécifique des gaz et leur débit).

Les essais ont été conduits successivement avec des braisettes de la Ruhr 8/35 à 25,50 p. 100 de matières volatiles rapportées au carbone total, et avec des noi-

settes de la Sarre à 34-36 p. 100 de matières volatiles, le pouvoir calorifique inférieur variant de 7.000 à 7.400 calories environ par kilogramme. On a fait varier les allures de marche dans d'assez grandes proportions, de 50 à 140 kilogrammes de combustible brûlé par mètre carré de surface de grille et par heure.

Pour chaque essai on a dressé un tableau très complet.

La température au foyer (en *a*) n'a pas été mesurée directement, mais calculée au moyen de la formule ;

$$\begin{aligned} & \text{Chaleur rayonnée par la grille, =} \\ & = \text{Pouvoir calorifique inférieur du combustible,} \\ & - \text{Pertes (imbrûlés, combustion incomplète),} \\ & - \text{Chaleur sensible emportée par les gaz,} \end{aligned}$$

où l'on suppose la température du combustible incandescent qui rayonne, égale à celle des gaz qui s'en échappent (quoiqu'ils ne soient pas complètement brûlés) ; de cette façon cette équation ne comporte qu'une inconnue, la température t_a cherchée du foyer. La chaleur rayonnée par la grille s'exprime par la loi de Stefan.

Ceci posé, l'analyse des gaz et la connaissance de la composition du combustible consommé donnent le débit gazeux et la chaleur spécifique de ces gaz. Connaissant de plus les températures en (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*), on en déduit la quantité de chaleur absorbée par chacun des appareils placés successivement sur le trajet des gaz.

Soit *Q* cette quantité pour une heure et pour l'un quelconque des appareils. Le coefficient de transmission global des gaz à l'eau où à la vapeur sera donné par la formule :

$$(109) \quad A = \frac{Q}{S \cdot \Delta t},$$

S étant la surface et Δt la différence moyenne de température. Kammerer a calculé Δt par la formule classique

dans le cas de la circulation de même sens ou de sens contraire :

$$(110) \quad \Delta t = \frac{(t'_1 - t''_1) - (t'_2 - t''_2)}{\text{Log} \frac{t'_1 - t'_2}{t'_2 - t'_2}},$$

t'_1 et t''_1 , étant les températures des deux fluides à une extrémité ; t'_2 et t''_2 , les températures à l'autre extrémité. Pour la circulation croisée (économiseur), il a employé une formule approchée due à M. Weber. Ces formules ne sont théoriquement valables que dans les hypothèses d'un coefficient de convection constant sur toute la surface d'échange.

On obtient donc A. Ce coefficient global est d'ailleurs donné par la relation classique :

$$(111) \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{\alpha_1 + \gamma_1} + \frac{e}{K_1} + \frac{1}{\alpha_2},$$

α_1 , et α_2 étant les coefficients de convection extérieur et intérieur, e l'épaisseur de la paroi, K_1 son coefficient de conductibilité, et γ_1 le coefficient de rayonnement (il n'y a pas de rayonnement sensible à l'intérieur des appareils).

$\frac{e}{K_1}$ est en réalité composé d'une somme de trois termes analogues, à cause de la présence de tartre et de suie.

Kammerer a admis $\sum \frac{e}{K_1} = \frac{1}{760}$, avec 0^{mm},5 de tartre et 0^{mm},1 de suie ; $K = 50$ pour le fer, et $e = 0^m,01$.

Le coefficient α_2 entre paroi et eau non bouillante a été calculé avec la formule de Soenneken donnée plus haut (chapitre II), en prenant le coefficient (A) de cette formule égal à 500 pour la fonte de l'économiseur, et $n = 0,6$. La précision importe peu du reste, car $\frac{1}{\alpha_2}$

faible. Le coefficient de convection entre paroi et eau est en effet toujours beaucoup plus grand (de l'ordre de 100 fois) que le coefficient de convection entre paroi et gaz. Pour la chaudière (eau agitée en ébullition) on a pris $\alpha_2 = 6.800$ dans le faisceau aquatubulaire et $\alpha_2 = 3.500$ dans le faisceau de tubes de fumée, d'après les chiffres de Holborn-Dittenberger et Austin. Pour le surchauffeur on a utilisé la formule simple de Nusselt relative à la vapeur d'eau :

$$\alpha_2 = 10,69 (\rho V)^{0,786},$$

avec V en mètres par seconde, de sorte que α_2 variait de 359 à 819.

Ceci fait, la formule (111) donne $\alpha_1 + \gamma_1$, et il n'y a plus qu'à séparer le rayonnement et la convection extérieure. Pour les tubes de fumée, nous sommes en réalité dans le cas du problème de la convection à l'intérieur d'un tuyau ; il n'y a pas de rayonnement sensible : on fait $\gamma_1 = 0$, d'où on tire aussitôt la valeur de α_1 .

Dans les autres cas, on calcule le coefficient de rayonnement γ_1 : pour cela on évalue le rayonnement de la grille et de la maçonnerie sur les tubes d'eau et le surchauffeur, en calculant la température moyenne de la maçonnerie avec l'hypothèse simplificatrice d'une perte extérieure de chaleur négligeable ; on évalue le rayonnement des carneaux sur l'économiseur par une méthode analogue, en écrivant que le carneau reçoit autant de chaleur par convection qu'il en perd par rayonnement. Finalement, on déduit par différence et pour les divers appareils d'échange les coefficients cherchés α_1 , qui sont des coefficients moyens de convection entre gaz en mouvement et faisceaux de tubes.

Voici le graphique tracé par Kammerer à la suite de ces essais (*fig. 21*).

Il comporte les courbes de α_1 relatives au réchauffeur,

au surchauffeur, au faisceau aquatubulaire et aux tubes de fumée. Il indique également les courbes des coefficients γ_1 de rayonnement et des coefficients globaux $\alpha_1 + \gamma_1$, afin de permettre la comparaison entre les deux modes de transmission de chaleur. Il a été fait en tout 11 essais complets.

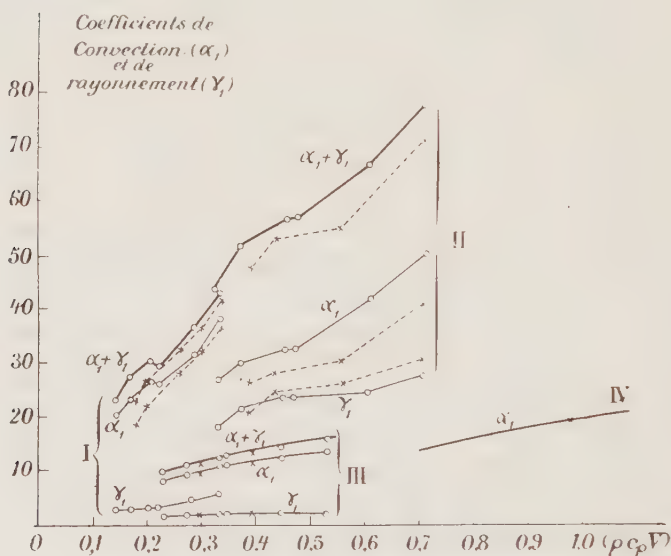


FIG. 21. — Résultats des expériences de Kammerer :

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| I. — Surchauffeurs ; | IV. — Tubes de fumées ; |
| II. — Faisceau aquatubulaire ; | — Braisettes de la Ruhr ; |
| III. — Réchauffeur, économiseur ; | --- Noisettes de la Sarre. |

Ces courbes montrent que les coefficients α_1 croissent avec la vitesse, et probablement avec une puissance de la vitesse inférieure à 1. Cette méthode ne permet pas de tirer des conclusions précises en raison de sa complication. Elle est cependant intéressante en elle-même. On a porté en abscisses ce que Kammerer appelle la « vitesse du flux calorifique des gaz », c'est-à-dire le produit $\rho c_p V$ (qui n'est autre que le débit en masse du

flux gazeux par unité de section, multiplié par la chaleur spécifique c_p), calculé pour chaque appareil d'après le débit gazeux et la section de passage des carneaux. Le surchauffeur et les tubes d'eau donnent des valeurs de α_1 qui concordent grossièrement; mais l'économiseur fournit pour α_1 des valeurs deux à trois fois plus faibles.

M. Kammerer estime que cela est dû à la température moins élevée et aux différences plus faibles de température à l'économiseur et il propose pour en tenir compte, la formule suivante pour le coefficient de convection à l'intérieur d'un tube :

$$(112) \quad \alpha_1 = A (\rho c V)^{0.8} (t_2 - t_1)^x \cdot T_1^y \cdot D^{-z},$$

t_2 étant la température du gaz, t_1 celle de la paroi, $T_1 = t_1 + 273$, D le diamètre du tube, et A , x , y , z , des constantes à déterminer.

Il s'appuie, pour mettre en avant cette formule, sur les expériences de Dulong et Petit qui avaient trouvé α_1 proportionnel à $(t_2 - t_1)^{0.233}$, et sur le fait que les formules diverses proposées ne rendent pas compte suffisamment de l'influence de la température.

Il est plus logique de penser que la valeur plus faible du coefficient α_1 pour l'économiseur est due à ce que la turbulence des gaz y est beaucoup moins accentuée, et que dans ce cas, les gaz canalisés dans un carneau tendent à se comporter comme dans un tube; c'est pourquoi α_1 se rapproche des valeurs trouvées pour les tubes à fumée, tout en leur restant un peu supérieur. Quant à la formule (112), nous pensons que M. Kammerer fait une confusion entre les deux problèmes du refroidissement dans l'air calme et de l'échauffement dans un courant gazeux d'ensemble. Au cours de ses essais, l'invariant $\left(\frac{VD}{a^2}\right)$ est resté supérieur à 5.600; dans ces conditions, l'influence des écarts de température sur le mouvement devait être

à peu près négligeable (voir les essais de Nüsselt) et l'on se trouvait dans le cas du second problème.

Quant à l'influence de la température absolue, elle ne doit, d'après la théorie, se faire sentir que par l'intermédiaire des variations des constantes physiques (ρ , c , K , γ , etc.).

Pour les tubes de fumée, Kammerer a trouvé des résultats concordant avec ceux de Groeber.

3° Le problème expérimental du courant gazeux à l'intérieur d'un tube. — Nous dirons d'abord quelques mots des dispositifs expérimentaux des principaux auteurs, puis nous essaierons de comparer entre eux les divers résultats. Nous nous limiterons aux gaz et aux vapeurs non condensantes; la plupart des essais ont du reste été faits avec l'air. Les vitesses expérimentées sont généralement supérieures à la vitesse critique.

A) LES EXPÉRIENCES DE SER, quoique anciennes, méritent d'être signalées, car elles donnent, malgré des causes d'erreur importantes, des indications intéressantes. Nous parlerons seulement des deux séries d'essais qu'il a faits pour l'étude de la convection par l'air.

Dans la première série, il opérait avec un échangeur de chaleur par contre-courant, l'air circulant à l'intérieur d'un tube horizontal en cuivre rouge, et l'eau chaude ou la vapeur circulant en sens inverse dans l'espace annulaire. L'appareil était entouré d'une épaisse couche d'ouate. Le débit d'air était mesuré avec un compteur; quatre thermomètres à mercure donnaient les températures d'entrée et de sortie de l'air et de l'eau. On prenait pour température de la paroi celle de l'eau chaude ou de la vapeur; la différence réelle existant entre ces deux températures était très faible, puisqu'on avait affaire à un tube métallique. Ser a utilisé successivement plusieurs tubes de

1 mètre de long et de diamètres respectifs 1, 2, 3 et 5 centimètres. Il a fait varier de 0^m,25 à 10 mètres par seconde la vitesse de l'air, et de 35° à 100° environ la température de l'eau chaude, l'air arrivant à la température extérieure. Connaissant le débit de l'air et sa variation de température, il en a déduit la quantité de chaleur échangée ; cette quantité, divisée par la différence

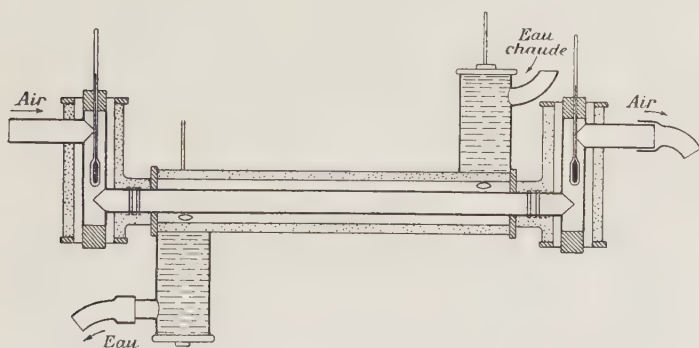


FIG. 22. — Expériences de Ser (1^{re} série).

moyenne arithmétique des températures des deux fluides et par la surface du tube, a fourni le coefficient moyen de convection. Les résultats ainsi obtenus sont tout en fait inutilisables aux vitesses inférieures à 2 mètres en raison de l'influence que prennent alors les mouvements causés par les différences de températures. Mais on constate que pour $V > 2$ mètres, les coefficients α donnés par Ser (p. 150) vérifient grossièrement la formule suivante, applicable au cas du mouvement tranquille :

$$\alpha = \frac{Re \rho V}{x},$$

que nous avons donnée en étudiant le problème théorique. On se trouve ici au voisinage de la limite d'application de

cette formule, avec $\frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}} = \lambda < 3$. La vérification est bonne surtout pour les tubes de plus petit diamètre, ce qui est logique.

Les résultats obtenus avec le tube de 0^m,05 de diamètre, et desquels Ser avait cru déduire la proportionnalité de α à $\sqrt{V}$, ont au contraire été effectués avec des vitesses inférieures à 2 mètres par seconde.

La seconde série d'expériences de Ser n'est pas beaucoup plus précise, et nous devons remarquer qu'elle ne correspond pas tout à fait au problème qui nous occupe. En effet, il faisait circuler de haut en bas, dans un tuyau en fonte vertical de 2^m,60 de hauteur et de 0^m,20 de dia-

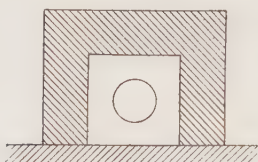


FIG. 23. -- Expériences de Ser (2^{me} série).

mètre intérieur, de l'eau chaude, tandis que l'air soufflé par un ventilateur montait à l'extérieur et autour de ce tuyau, enfermé dans un coffre carré en briques creuses de 0^m,38 de côté. Ce sont donc en réalité les lois de la

transmission de chaleur à l'extérieur et le long du tuyau qu'il a étudiées. Le dispositif expérimental se prêtait mal à des mesures précises, en raison des déperditions de chaleur du coffre, et du rayonnement qui s'exerçait entre le tuyau et la maçonnerie. De plus, avec un appareil vertical, l'air en s'échauffant au contact de la fonte accélérât sa vitesse ascendante au voisinage immédiat de cette paroi, de sorte que la vitesse moyenne mesurée ne correspondait pas à la vitesse de la couche d'air à travers laquelle se faisait l'échange de chaleur. C'est pourquoi Ser a trouvé pour α des valeurs nettement trop grandes. Il est cependant intéressant de remarquer qu'il a expérimenté ainsi le problème de Boussinesq et qu'il a trouvé la proportionnalité approchée de α à $\sqrt{V}$, ce qui constitue

tout de même une vérification grossière de la théorie. Mais nous ne pouvons rien en tirer de précis pour le problème du tube proprement dit.

B) NICHOLSON, en 1909, a fait des essais qui se rapprochent de la deuxième série d'expériences de Ser, quant au dispositif. Il envoyait de l'air chaud et saturé de vapeur, comprimé par un compresseur à deux étages, à une pression de l'ordre de 60 livres anglaises par pouce carré, dans un espace annulaire vertical; dans le tube central circulait l'eau de refroidissement en sens inverse. Le mouvement de l'air était descendant; celui de l'eau était ascendant. Le tube d'eau avait une section intérieure de 0,000766 pied carré et une surface de contact de 1,225 pied carré. Le tube annulaire avait une section intérieure de 0,0029 pied carré. Les diamètres de cet anneau étaient 0,516 pouce et 0,898 pouce, et la longueur totale du tube : 12,5 pieds (soient : 0^m,131, 0^m,228 et 3^m,80). L'air arrivait à une température de 100 à 160° Fahrenheit (soit 38° à 71° centigrades) et sortait refroidi de 70° à 90° F. (soit 21° à 32° C.). Le débit d'eau était

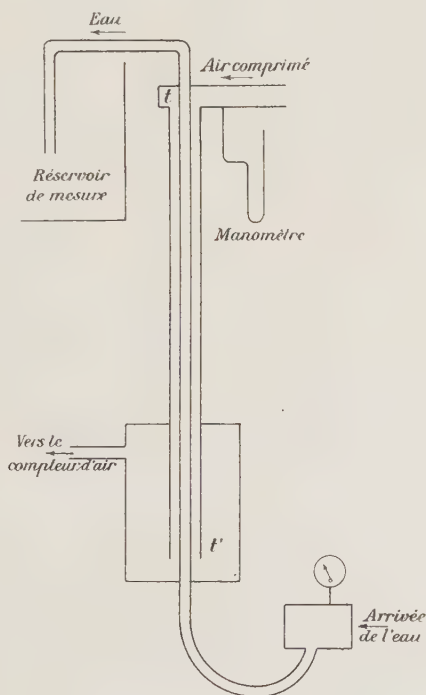


FIG. 24. — Expériences de Nicholson.

total du tube : 12,5 pieds (soient : 0^m,131, 0^m,228 et 3^m,80). L'air arrivait à une température de 100 à 160° Fahrenheit (soit 38° à 71° centigrades) et sortait refroidi de 70° à 90° F. (soit 21° à 32° C.). Le débit d'eau était

mesuré dans un réservoir et le débit d'air avec un comp-
teur. Deux manomètres donnaient la pression de l'eau et
celle de l'air comprimé, et deux thermomètres à mercure
mesuraient les températures d'entrée et de sortie de l'air.
Se basant sur la formule linéaire de Reynolds :

$$Q = 3\rho V (t_1 - t_0) \quad (\text{unités anglaises}),$$

il a proposé une formule également linéaire, mais qui tient
compte de la température moyenne et du diamètre D de
la section circulaire équivalente à l'anneau $\left(D = \frac{4\sigma}{\chi} ; \right.$
 σ , surface de l'anneau ; χ , périmètre d'échange $\left. \right)$. Rame-
née en unités métriques, cette formule est :

$$(113) \quad \alpha = 0,781 + 0,022 (t_1 + t_0) \\ + 0,1415 \left[1 + \frac{0,1016}{D} \right] \sqrt{1 + 0,0281 (t_1 + t_0) \cdot \rho V}.$$

On peut faire à Nicholson les mêmes objections qu'à
Ser, et en particulier que le problème expérimenté n'est
pas exactement le problème du tube ; mais il a eu le
mérite de reconnaître le premier l'influence du diamètre
sur le coefficient de convection.

C) Josse, en 1909, a fait des mesures de α pour l'eau
dans les condenseurs et pour l'air dans un appareil spé-
cial. Nous parlerons seulement du coefficient de convection
pour l'air au sujet duquel Josse a trouvé des résultats
intéressants. Il opérait avec un tuyau horizontal d'air
circulant dans un manchon à vapeur d'eau, ainsi que
l'indique le schéma ci-contre ; une pompe à air faisait un
vide partiel mesuré au manomètre. Le tube avait 2^m,3
de diamètre et 1^m,32 de longueur. Il a opéré successive-
ment aux pressions absolues suivantes : 1^{kg},034, 0^{kg},510
et 0^{kg},106. La température de l'air a varié de 16°,7 à

36°,5 à l'entrée, et de 58°,8 à 84°,5 à la sortie, tandis que celle de la paroi était sensiblement égale à 100°. La vitesse de l'air a évolué entre 1^m,47 et 18^m,96.

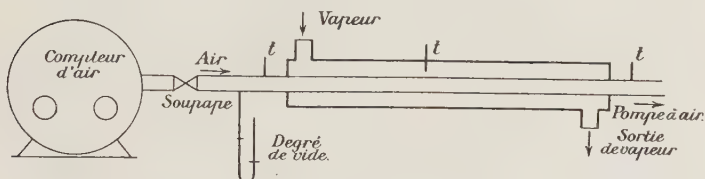


FIG. 25. — Expériences de Josse.

Trois thermomètres à mercure donnaient les températures des deux fluides. Josse a tracé trois courbes correspondant aux trois valeurs de la pression, montrant

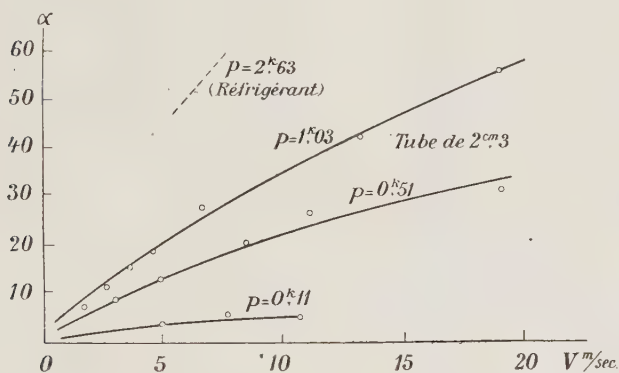


FIG. 26. — Graphique des expériences de Josse.

ainsi nettement l'influence de la pression sur α . Ces courbes résument ses expériences, qu'il n'a pas traduites en formule.

D) La même année, JORDAN, professeur à l'École municipale de technologie de Manchester, exécutait plusieurs séries d'essais. L'air chaud circulait de haut en bas dans

un tube vertical en cuivre de 1 mètre de long, tandis que l'eau de refroidissement parcourait en sens inverse un manchon étroit en fonte calorifugée entourant complètement ce tube. La température d'entrée de l'air était donnée par une pince thermoélectrique, et la température de sortie, par un thermomètre à mercure. La température du tube de cuivre était mesurée au moyen de quatre pyromètres thermoélectriques venant appliquer leur soudure au milieu de l'épaisseur du tube, protégés avec soin de l'influence de l'eau, et échelonnés sur la longueur. Deux manomètres donnaient la pression de l'air, qui provenait d'un réservoir à air comprimé et passait au préalable dans un serpentin plongé dans un bain salin (four Brays-haw). On mesurait le débit de l'eau, d'où on déduisait par un calcul simple le débit de l'air, en écrivant l'égalité de la chaleur emportée par l'eau et de la chaleur cédée par l'air. Deux thermomètres à mercure donnaient les températures d'entrée et de sortie de l'eau. Enfin, l'appareil d'échange de chaleur était protégé contre le rayonnement du four Brayshaw par un écran d'asbeste. On déduisait le coefficient α de la relation classique :

$$(114) \quad \alpha = \frac{Mc_e(t'_2 - t_2)}{S(t_1 - t'_1)} \text{Log} \frac{t_1 - t_0}{t'_1 - t'_0} \times \frac{1}{1 - \frac{t_0 - t'_0}{t_1 - t'_1}},$$

en appelant :

M , le débit de l'eau ;

c_e , sa chaleur spécifique ;

$t'_2 - t_2$, sa variation de température (échauffement) ;

S , la surface d'échange ;

$t_1 - t'_1$, le refroidissement de l'air ;

$t_0 - t'_0$, la variation de température de la paroi intérieure entre l'entrée et la sortie de l'air ;

t_0 et t'_0 sont les chiffres mesurés, affectés d'une légère correction, afin de représenter les températures de la surface intérieure.

Jordan a utilisé d'abord trois tubes différents, ayant respectivement pour diamètres intérieurs : $0^m,01285$, $0^m,0314$ et $0^m,0500$; il a fait deux autres séries d'expériences en introduisant dans l'axe du dernier tube des cylindres de fer forgé très minces, bouchés et maintenus par des fils de fer en spirale; ces cylindres avaient pour diamètres extérieurs respectifs $0^m,0343$ et $0^m,0404$. Dans ces deux dernières séries, l'eau ne circulant pas dans l'espace central, le problème était un peu différent; il a cependant obtenu des résultats cadrant avec les autres à condition de remplacer la section annulaire par la section circulaire équivalente

de diamètre $\frac{4\sigma}{\chi}$, χ étant le

périmètre d'échange de chaleur, et σ la section de passage. Pour l'ensemble de ses expériences,

Jordan a fait varier la température moyenne de l'air entre 91° et 309° , et celle du tube, entre 13°

et 52° centigrades; la vitesse de l'air a varié de 15 à 160 mètres environ. Comme Nicholson, il a exprimé ses résultats dans une formule où entrent la température moyenne entre celle de l'air (t_m) et celle du tube (t_{0m}),

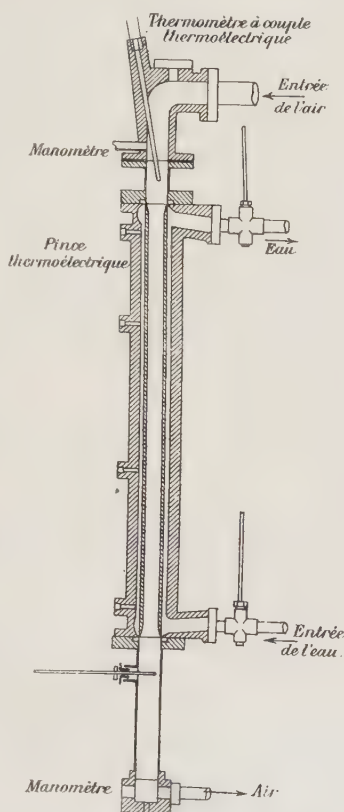


FIG. 27. — Dispositif expérimental de Jordan.

le diamètre, et le produit ρV . Cette formule s'écrit en unités pratiques :

$$(115) \quad \alpha = 26,38 + \left[4,82 - 15,93 \cdot D + 0,01069 \left(\frac{t_{1m} + t_{2m}}{2} - 17,78 \right) \right] \rho V.$$

Comme Nicholson, il trouve que α décroît quand le diamètre augmente. Mais il n'a pas fait varier la pression, qui est restée voisine d'une atmosphère.

M. Leprince-Ringuet, reprenant les tableaux d'expériences originaux de Jordan, a montré que ces expériences étaient beaucoup mieux représentées par la formule suivante où L est la longueur du tube :

$$(116) \quad \alpha = \frac{51,5}{L^p} [0,0595 (1 + 0,00215 t_{1m}) \rho V]^n$$

en prenant n fonction du diamètre D , approximativement égal à :

$$(117) \quad n = \frac{1 + 18D}{1 + 36D}$$

et $p = 0,13$ environ.

Cette formule fait varier n entre $1/2$ et 1 , ce qui est parfaitement conforme à la théorie que nous avons exposée plus haut.

En réalité l'influence de la longueur L du tube n'a pas été fournie par les travaux de Jordan ; tous ses tubes avaient en effet la même longueur. Mais M. Leprince-Ringuet s'est basé sur les expériences de Carcanagues et des essais directs effectués sur des chaudières (Henry ; Pennsylvania Railroad) pour proposer l'exposant $0,13$, d'ailleurs à titre tout à fait provisoire, en raison du peu de précision de ces expériences. Cette formule est jusqu'à présent la seule qui fasse varier l'exposant n ; nous verrons plus loin que la théorie exige que n soit variable, sinon avec D , du moins avec le rapport : $\frac{D}{L}$.

E) LES EXPÉRIENCES DE NÜSSELT. — Les expériences de Jordan ont été conduites avec beaucoup de méthode. Mais il faut arriver à Nusselt (1909) pour rencontrer des essais basés sur des notions théoriques précises. Jusqu'ici nous avons parlé de température du fluide sans spécifier exactement ce que nous entendions par là. Cette température varie pourtant beaucoup dans une section, et si l'on veut arriver à une précision suffisante pour α , il faut définir et mesurer la température moyenne dans cette section; c'est Nusselt qui l'a fait le premier. Autre avantage : il s'est basé sur les considérations d'homogénéité, ce qui a tout de suite donné à ses formules une généralité plus grande, à la fois en ce qui concerne le domaine d'applicabilité et en ce qui concerne le changement de nature du fluide. Enfin il a soigné les méthodes de mesure des températures.

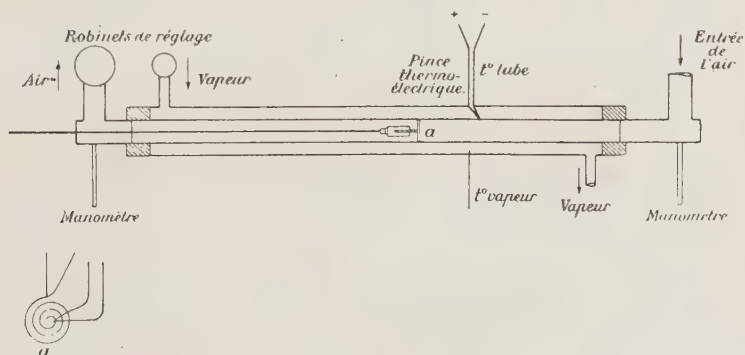


FIG. 28. — Schéma des expériences de Nusselt (α , thermomètre à résistance électrique, mobile le long du tube.)

Par contre et malheureusement, il a opéré sur un tube unique et dans des limites de température assez restreintes.

Nusselt s'est servi (1909), à l'École technique supérieure de Dresde, d'un tube horizontal de laiton étiré

sans soudure, de 22^m,01 de diamètre intérieur, de 26 millimètres de diamètre extérieur et de 60 centimètres de long, dans lequel circulait le gaz comprimé (air, gaz carbonique ou gaz d'éclairage). Ce tube était chauffé extérieurement à la vapeur à 100°. Le dispositif ressemble donc en gros à celui de Josse; mais le gaz était comprimé au lieu d'être sous faible pression. L'air sous pression était fourni par un compresseur à trois étages : un compteur à air donnait le débit. On mesurait la pression de l'air, ainsi que celle de la vapeur (cette dernière avec un manomètre à mercure) et la température de la vapeur.

Pour le choix du thermomètre dans la mesure de la température du gaz, Nüsselt a fait des essais spéciaux ; il a remarqué que la température lue était influencée par le frottement du gaz contre la tige des thermomètres à mercure, et par les phénomènes de rayonnement et de conductibilité. Il a choisi alors un pyromètre à résistance électrique à fil très fin (fil de platine de 0^m,1), mobile sur toute la longueur du tube, et étendu en spirale sur toute la section, de façon à fournir réellement une température moyenne. La spirale était supportée par une croix de fibre vulcanisée (Vulkanfiber), et le tube contenant les fils électriques était placé dans l'axe et à l'aval, pour éviter l'échauffement préalable du gaz avant la section de mesure. Quant à la température extérieure du tube de laiton, elle était donnée par une pince thermoélectrique; une légère correction fournissait la température de la paroi intérieure. Une expérience durait une à deux heures; on maintenait aussi constantes que possible la pression et la température d'entrée du gaz, ainsi que la température de la vapeur; on relevait continuellement les indications thermométriques; le thermomètre à résistance était placé successivement aux deux extrémités du tube.

La pression de l'air a varié dans ces essais entre 1, 15 et 16^{kg},06 par centimètre carré (atmosphères allemandes); la température du tube était toujours très voisine de 100°, tandis que celle de l'air se tenait entre 16°,5 et 68°, et que la vitesse était comprise entre 0^m,37 et 30 mètres. Quelques essais ont été faits en interposant à l'amont un tube rectiligne de 2 mètres de longueur et de même diamètre que le tube de laiton, afin de diminuer les remous provoqués par le voisinage du coude à angle droit par lequel arrivait l'air. Nüsselt a trouvé effectivement que α était un peu plus petit, du moins aux vitesses notables. Enfin, des mesures ont été faites à la pression atmosphérique avec le gaz d'éclairage et avec le gaz carbonique.

Voir ci-après le tableau des expériences de Nüsselt pour l'air.

Nüsselt a résumé ces résultats dans une formule, après avoir calculé ainsi α par la relation classique qui donne le flux total de chaleur dans l'hypothèse d'un coefficient constant le long de la surface d'échange :

$$Q = \alpha \cdot S \cdot \frac{t'_1 - t_1}{\text{Log} \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t'_1}},$$

t_0 étant la température uniforme de la paroi; t_1 et t'_1 , les températures mesurées à l'entrée et à la sortie du fluide.

Groeber considère que Nüsselt aurait dû prendre comme température moyenne dans une section, non pas la moyenne arithmétique des températures, mais la moyenne arithmétique du produit $v(t - t_0)$. Cela est exact théoriquement. Mais il ne faut pas exagérer l'erreur ainsi commise, v variant assez peu dans la section quand le mouvement est turbulent (voir plus loin, chapitre VII).

N°	p kg : cm ²	$\frac{VD}{a^2}$	$\alpha \frac{D}{K}$	N°	p kg : cm ²	$\frac{VD}{a^2}$	$\alpha \frac{D}{K}$
1	1.45	397	6.28	35	7.02	1.8.6	18.55
2		812	6.72	36		3.406	19.50
3		1.153	6.61	37		6.175	27.88
4		1.890	8.36	38		12.020	48.08
5		3.625	16.43	39		23.000	80.03
6		5.388	23.95	40a		35.400	118.8
7		7.430	31.68	40b		35.750	104.6
8		10.460	41.95	41		51.200	156.9
9		13.270	50.30	42		53.280	159.6
10		16.300	58.85	43		55.800	148.3
11		17.650	64.00	44		78.500	215.0
12		21.920	77.65	45		91.600	243.0
13		24.900	82.75				
14	2.07	560	8.72	46	10.0	3.942	23.42
15		1.471	9.99	47		8.110	34.58
16		3.363	18.33	48		19.030	64.8
17		6.545	29.80	49		38.050	116.8
18		13.060	52.60	50		53.750	152.0
19		13.050	49.50	51		54.350	153.6
20		20.470	72.7	52		55.900	158.0
21		26.500	87.8	53		57.100	164.0
22		31.700	106.8	54		80.320	212.0
23		40.850	124.1	55		87.800	222.0
24		44.580	132.7	56		96.500	268.0
				57		99.850	254.0
25	3.98	1.447	13.15	58	13.03	5.430	29.38
26		2.876	15.83	59		10.410	43.20
27		6.660	29.24	60		28.330	96
28		12.880	49.82	61		55.400	168.09
29		23.660	82.40	62		77.100	218.3
30		33.920	112.6	63		96.700	233.4
31		46.300	141.0	64	16.06	5.01	32.52
32		47.100	133.4	65		10.950	46.15
33		57.800	168.20	66		9.900	42.40
34		65.700	186.0	67		28.500	95.3
				68		58.450	168.7
				69		77.800	215.6

Nüsselt a proposé d'abord :

$$(118) \quad \alpha = 15,90 \frac{K_0}{D^{0,214}} \left(\frac{c \rho V}{K} \right)^{0,786},$$

K_0 étant la valeur à la paroi du coefficient de conductibilité : tandis que K , c et ρ représentent les valeurs moyennes de ces constantes physiques pour l'ensemble du courant fluide (V est en mètres par seconde).

Groeber fait remarquer qu'il aurait mieux valu remplacer K_0 par K et mettre 18,1 au lieu de 15,90 comme le coefficient.

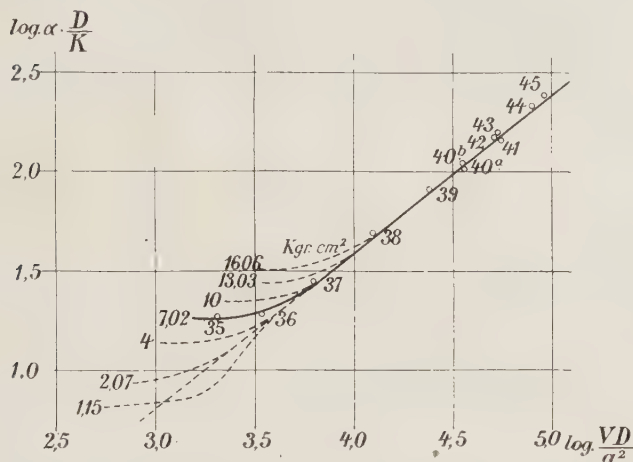


FIG. 29. — Graphique des résultats des expériences de Nusselt.

Grâce aux précautions ci-dessus, Nusselt est parvenu à une précision plus grande que ses prédécesseurs. Il faut remarquer cependant, comme le montre le graphique ci-joint, que la formule d'homogénéité

$$\frac{D}{K} \alpha = f\left(\frac{VD}{a^2}\right),$$

ne se vérifie que pour $\frac{VD}{a^2} > 10.000$ environ. Au-dessous de cette valeur, des divergences notables se manifestent entre les diverses séries à pressions différentes ; α semble alors croître spécialement avec la pression. Les considérations d'homogénéité ne l'expliquent pas, mais il ne doit s'agir que d'erreurs systématiques dont l'effet ne se fait sentir que lorsque la vitesse n'est pas trop grande ; les autres expérimentateurs, tels que Josse, n'ont pas observé

de telles divergences; ce phénomène doit d'ailleurs se combiner aux vitesses faibles avec l'influence des différences de température sur le mouvement. Remarquons que l'inégalité ci-dessus correspond à : $\lambda > 10$ environ, λ étant la variable que nous avons considérée dans les problèmes théoriques. On se trouve d'ailleurs ainsi nettement au-dessus de la vitesse critique.

Nüsselt a donné simultanément des formules approchées de la forme :

$$(119) \quad \alpha = A (c_p V)^n,$$

avec $n = 0,786$, V en mètres par seconde, et :

$A = 5,772$ pour l'air;

$A = 4,774$ pour CO_2 ;

$A = 15,45$ pour le gaz d'éclairage;

$A = 10,79$ pour la vapeur d'eau;

Ces formules sont valables dans les limites de ses expériences. La vapeur d'eau n'a pas été expérimentée par lui; mais la valeur correspondante de A a été proposée d'après les essais de Knoblauch et Jacob (ces essais sont d'ailleurs peu précis).

Postérieurement, Nüsselt reconnut, par des considérations théoriques sur le tube à mouvement de Poiseuille, que α devait dépendre de la longueur L du tube. D'après les travaux de Rietschel et de Holmboe, il s'aperçut de plus que l'exposant $0,214 = 1 - 0,786$ de la formule (118) devait être inexact. Il prit, d'après Rietschel, la valeur 0,16 pour cet exposant, qu'il introduisit en 1913 dans une nouvelle formule, corrigée définitivement en 1917 :

$$(120) \quad \alpha \frac{D}{K} = 0,03622 \left(\frac{D}{L} \right)^{0,054} \cdot \left(\frac{c_p V D}{K} \right)^{0,786},$$

et tenant compte enfin de l'influence du rapport $\frac{D}{L}$. Cette

formule, mise en abaque, est valable pour l'air dans les limites des expériences. Les invariants y sont mis en évidence.

Nüsselt a donné également une formule pour le coefficient vrai de convection α_x , l'équation (120) convenant pour le coefficient moyen α_0^x . Il se base sur la relation théorique que nous avons déjà rencontrée :

$$\frac{d}{dx} (x \alpha_0^x) = \alpha_x,$$

mais qui n'est valable que lorsque la température moyenne du fluide ne varie pas sensiblement d'une extrémité à l'autre du tube.

Il faut prendre dans la formule (120) des valeurs moyennes pour K et c ; le plus simple est de prendre leurs valeurs pour la température moyenne de l'ensemble du fluide. Nüsselt a donné des formules* plus compliquées, mais sans intérêt. *Quant au produit ρV , il est rigoureusement constant le long du tube*, car il représente le débit en masse par unité de section.

Les derniers travaux de Nüsselt sur cette question (1926) tendent à ajouter au second membre un terme tenant compte du rayonnement des gaz sur la paroi ; il se base sur ses travaux personnels relatifs aux déperditions de chaleur dans les moteurs à explosion, et dont nous avons parlé à propos des lois du refroidissement, et sur une formule donnée par Jürges, qui a trouvé pour l'air à la pression atmosphérique dans un tuyau, l'expression suivante du coefficient de convection :

$$\alpha = 6,47 \cdot V^{0,78} + 5,03 \cdot e^{-0,6 \cdot V}.$$

D'après cela, le coefficient total définitif de transmission de chaleur dans un tuyau serait la somme de trois termes, un terme de convection dû aux vitesses, un terme

de convection dû aux mouvements causés par les différences de température, et un terme de rayonnement :

$$\alpha_{\text{total}} = \alpha_c + \alpha_t + \alpha_r.$$

D'après Nusselt, α_c est donné par la formule (120), α_t par la loi du refroidissement corrigée d'un facteur exponentiel :

$$\alpha_t = 0,76 \frac{\text{K}}{\text{D}} \sqrt[4]{\frac{g D^3 \rho^2 (t - t_0)}{\tau^2 T_m}} \cdot e^{-0,000028 \frac{\text{Lc} \rho V}{\text{K}}},$$

et α_r par la loi du rayonnement :

$$\alpha_r (t - t_0) = 0,362 \left[\left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right],$$

le coefficient 0,362 n'étant valable que pour les gaz d'échappement des moteurs à explosion, mais non pour l'air, qui ne donne pas de rayonnement appréciable quand il ne contient pas d'humidité.

Ces formules ont besoin d'être sanctionnées par l'expérience. Leur intérêt est restreint. Elles montrent cependant que Nusselt a essayé de tenir compte de la complexité réelle du problème quand le rayonnement des gaz n'est plus négligeable, et de condenser dans une même formule les lois du refroidissement avec ou sans mouvement d'ensemble à l'intérieur d'un tube.

F) Disons quelques mots des *Essais de Rietschel* (1910) et de *Holmboe* (1909). Avec Jordan, ce sont les seuls expérimentateurs qui aient systématiquement étudié l'influence du diamètre du tube pour l'air (Pønsen l'a fait pour la vapeur d'eau).

Rietschel, à Charlottenburg, a opéré avec deux tubes en acier soudé breveté de diamètre intérieur : 3^m,35 et de longueurs respectives : 0^m,649 et 0^m,978. La vitesse de l'air était comprise entre 1 et 30 mètres. Les tempé-

ratnres, mesurées au thermomètre à mercure, étaient de 100° à 150° pour la paroi, et de 20° à 60° pour l'air (limites voisines de celles de Nüsselt). La pression était un peu inférieure à une atmosphère. Il a utilisé également des réchauffeurs d'air tubulaires dont le diamètre variait de 2^{cm},15 à 11^{cm},9, et il a réuni ses résultats dans la formule :

$$(121) \quad \alpha = 3,145 \frac{(\rho V)^{0,79}}{D^{0,16}}.$$

Nüsselt s'en est servi pour proposer sa formule (120). Notons en passant la concordance des travaux de Rietschel et de Nüsselt en ce qui concerne la valeur (0,79 à 0,786) de l'exposant de (ρV) .

Holmboe, opérant sur des tubes de 2^{cm},5 et 10 centimètres de diamètre, a trouvé pour l'exposant de $\frac{1}{D}$ dans l'expression de α les valeurs 0,141, 0,159 et 0,183. Leur moyenne est 0,161, ce qui concorde avec Rietschel de façon remarquable.

G) GROEBER, en 1912, a fait des essais au laboratoire de l'école technique de physique à Munich, avec un tube d'acier sans soudure de 6^{cm},2 de diamètre et de 2 mètres de long, et de l'air à la pression atmosphérique. La vitesse était comprise entre 5 et 15 mètres; la température du tube, entre 60° et 200°; et la température de l'air, entre 90° et 325°. L'air chaud cédait sa chaleur par l'effet du refroidissement naturel du tube. Ce dispositif est moins perfectionné que celui de Nüsselt, quoique Groeber mesurât aussi la température avec soin, avec un thermoélément mobile dans la section. La formule empirique à laquelle il est parvenu :

$$\alpha = 3,81 + \frac{82,8}{t_1} + \frac{(273 - t_0)^2}{29'100} \frac{(\rho V)^n}{D^{1-n}},$$

n'a pas grand intérêt, car elle ne peut s'appliquer au delà du domaine des expériences. Il a abandonné cette expression pour donner la formule citée au chapitre II, et presque identique à (120).

H) PÖNSGEN seul, en 1916, a expérimenté la vapeur d'eau surchauffée, ce qui donne un grand intérêt à ses travaux. Il a pris un long tube horizontal du type Mannesmann étiré sans soudure. La vapeur provenant d'une

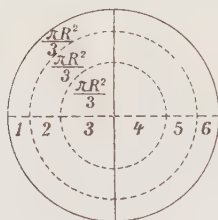


FIG. 30. — Expérience de Pönsgen; mesure de la température moyenne dans une section : *a*, doigt mobile parcourant un diamètre; 1, 2, 3, 4, 5, 6, positions successives du doigt mobile.

chaudière passait dans deux surchauffeurs, l'un à gaz, l'autre électrique, puis dans un compteur du type Hallwachs. Le tube avait 3^m,50 de long, et Pönsgen a essayé successivement deux diamètres : 9^{cm},57 et 3^{cm},94. La pression a atteint successivement 1, 3, 5, 7 et 9 kg/cm². L'installation était analogue à celle de Groeber. Les températures du tube étaient de 100° à 260°; celles de la vapeur de 140° à 305°,

et les vitesses, de 1^m,90 à 15 mètres. Un thermoélément pourvu d'un doigt mobile protégé contre l'influence du rayonnement, permettait de parcourir la section droite (fig. 30). Les températures de la paroi étaient données par sept éléments thermoélectriques cuivre constantan, vissés dans les logements extérieurs.

Pour déterminer la température moyenne dans une section, on divisait cette section en $(2n)$ demi-couronnes circulaires de même surface, on prenait la température de chacune de ces demi-couronnes, et on faisait la moyenne arithmétique. Par exemple, avec deux cercles intermé-

diaires concentriques, on avait six mesures de température à faire, en des points symétriques deux à deux par rapport à l'axe. Naturellement, les tiges de pyromètres se trouvaient à l'aval afin d'éviter les causes d'erreur systématiques.

Poensgen a résumé ses travaux dans la formule empirique :

$$\alpha = 3,29 \frac{p^{1,082} \cdot V^{0,892}}{D^{0,1643} \times 10^{0,0017t_0}},$$

t_0 étant la température de la paroi.

On constate la même influence du diamètre D qu'avec Rietschel. Mais l'exposant de la vitesse est plus grand.

Comparaison des diverses expériences ci-dessus. — En raison de la diversité des résultats ci-dessus, il faut faire appel aux considérations d'homogénéité en général et remonter jusqu'aux tableaux d'expériences eux-mêmes. Si l'on veut faire une comparaison, il faut porter ces résultats sur un même graphique comportant comme abscisses :

$$\log \left(\frac{VD}{a^2} \right),$$

et comme ordonnées :

$$\log \left(\alpha \frac{D}{K} \right).$$

Comme α dépend aussi du rapport $\frac{L}{D}$, les courbes des divers expérimentateurs, en admettant qu'elles soient concordantes, ne doivent pas se superposer, mais se ranger parallèlement dans l'ordre des valeurs de ce rapport géométrique, si on admet qu'aucune autre variable n'intervient.

En réalité, à l'examen du graphique que nous avons tracé (*fig. 31*), on voit que les essais de Nüsselt, Groeber,

Rietschel pour $D = 3^{\text{cm}}, 35$, et Josse, se superposent presque exactement, sauf en partie pour Nüsselt (dont nous avons porté la courbe correspondant à sept atmosphères) quand :

$$\frac{D \rho V}{K} < 5.000.$$

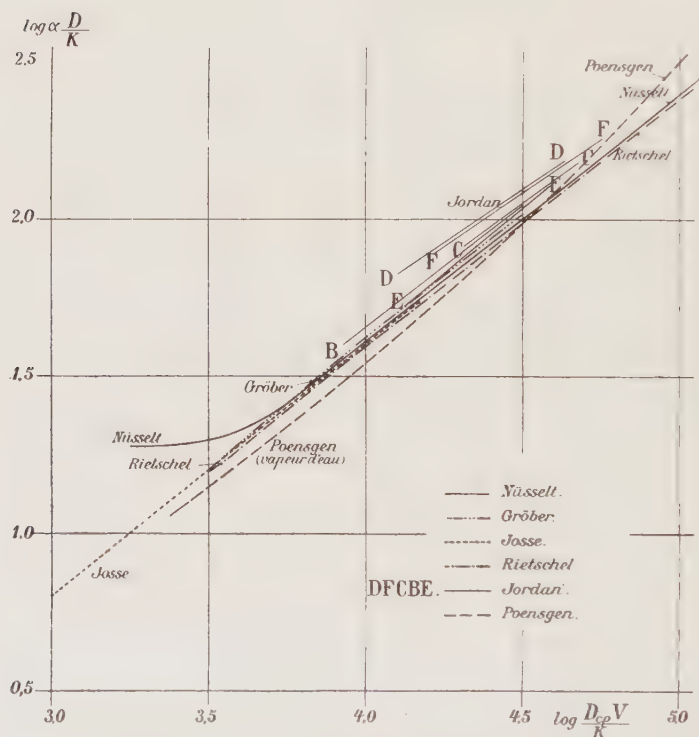


FIG. 31. — Comparaison des résultats d'expériences. Problème du tube avec l'air et la vapeur d'eau.

Poensgen indique un coefficient angulaire beaucoup plus élevé pour la vapeur d'eau. Jordan est au-dessus des autres courbes, dans l'ordre (E), (B), (C), (F), (D), de ses expé-

riences. Cet ordre correspond aux diamètres croissants employés.

Série (E), section circulaire.....	D = 0,01285
— (B), — annulaire.....	D = 0,0174
— (C), — —	D = 0,0264
— (F), — circulaire.....	D = 0,0314
— (D), — —	D = 0,0500

Ces chiffres représentent également les valeurs du rapport $\frac{D}{L}$ (puisque $L = 1$ mètre).

La concordance observée est beaucoup moins bonne qu'elle ne le paraît sur la graphique, car les échelles sont logarithmiques, et un écart de 0,1 entre deux ordonnées correspond en réalité à un rapport de 1,26 entre les nombres correspondants.

La cause des résultats trop forts de Jordan doit être recherchée dans une erreur systématique de mesure des températures (le thermomètre à mercure mesurant la température de l'air à sa sortie indiquait probablement une valeur trop grande à cause du frottement du fluide sur le réservoir du verre, ainsi que Nüsselt l'a observé), dans le fait qu'il a opéré avec circulation à contre-courant (nous avons vu en effet qu'on obtenait ainsi des valeurs de α un peu plus grandes qu'avec une température de paroi uniforme), et peut-être aussi parce que la disposition verticale de l'appareil accentuerait la turbulence (les autres auteurs mentionnés ci-dessus ont utilisé des tubes horizontaux).

La croissance de $\alpha \frac{D}{K}$ avec le diamètre pour une longueur constante du tube, montre que $\alpha \frac{D}{K}$ croît avec le rapport $\frac{D}{L}$. La décroissance des coefficients angulaires dans les mêmes conditions montre que

l'exposant de la vitesse doit diminuer quand $\frac{D}{L}$ augmente, ce que la formule Groeber-Nusselt (120) ne montre pas. De plus, cette formule ne saurait, d'après Poensgen, exprimer les valeurs de α pour la vapeur d'eau.

Groeber, dans son ouvrage de 1921, fait dix remarques, dont les plus intéressantes sont :

1° On n'a pas tenu compte du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho V D}{\eta}$$

(nous avons vu que, pour apprécier son influence ou, ce qui revient au même, celle du nombre de Stanton, il faudrait opérer avec des gaz différents) ;

2° L'influence de la rugosité de la paroi n'a pas été considérée ;

3° Le choix des températures moyennes et des valeurs moyennes des constantes physiques est quelque peu arbitraire ;

4° La température moyenne dans une section devrait être calculée, non pas en prenant la moyenne arithmétique des températures sur la section, mais en prenant la définition qui correspond à l'expression du flux calorifique qui traverse cette section :

$$(t_m - t_0) \int \int_{\sigma} v d\sigma = \int \int_{\sigma} (t - t_0) v d\sigma ;$$

(mais cela exigerait la connaissance exacte de la variation de la vitesse sur la section). D'après Groeber, l'erreur commise peut atteindre 30 p. 100 avec la première définition, mais ce chiffre est nettement exagéré.

Remarquons qu'en toute rigueur il faudrait mettre ρv au lieu de v sous les signes d'intégration.

5° Notre connaissance des constantes physiques est imparfaite.

Groeber conclut alors à la nécessité de nouvelles recherches; il indique douze points principaux, dont nous citerons : expérimenter avec des conditions initiales différentes et des degrés différents de turbulence à l'origine; faire varier D et $\frac{L}{D}$ indépendamment; étendre les limites de température et de pression; essayer systématiquement d'autres gaz que l'air; faire varier l'inclinaison du tube par rapport à la verticale; varier la forme de la section. Il reconnaît ensuite que la forme monôme pour α n'est nullement indiquée par la théorie.

Ajoutons que l'on devrait étudier l'influence de la non-uniformité de la température de la paroi sur le coefficient α , influence qui, d'après la théorie, n'est certainement pas négligeable.

Nous reviendrons en détail au chapitre VII sur l'interprétation des résultats d'expériences indiqués par la *fig. 31*.

4° Le coefficient de convection des liquides dans un tube. —

Les travaux les plus intéressants sont ceux de Stanton et de Soenneken.

Stanton (1897) opérait avec un tube de cuivre étiré vertical parcouru de haut en bas par un courant d'eau et entouré d'un manchon en bronze parcouru par l'eau de refroidissement. Il mesurait d'une part le débit de l'eau et les températures d'entrée et de sortie, et d'autre part la température moyenne du tube de cuivre. A cet effet, il évaluait avec précision sa dilatation par rapport à un tube témoin dont la température était maintenue constante, grâce à une circulation d'eau. Il opéra avec les diamètres suivants :

$$0^{\text{m}},736; \quad 1^{\text{cm}},07 \quad \text{et} \quad 1^{\text{cm}},39;$$

et trouva, en se basant sur un raisonnement approché

et sur les travaux de Reynolds :

$$(122) \quad \alpha = B \cdot \left(\frac{\beta \eta}{D} \right)^{1-n} \cdot (\rho V)^n,$$

avec

$$B = B_0 (1 + \delta t_1) (1 + \delta' t_0) \times 10^n; \quad (\delta = 0,01, \delta' = 0,004),$$

et

$$\beta \eta = (1 + 0,0336 t_1 + 0,00022 t_1^2)^{-1} \quad \text{proportionnel à } \eta).$$

n varie entre 0,825 et 0,86, et B_0 entre 0,900 et 0,955 (unités pratiques). Ces résultats ne sont pas très précis. Stanton a donné aussi en 1891 la formule plus grossière :

$$\alpha = 6.410 \cdot V^{0.8},$$

qui se rapproche des résultats obtenus postérieurement par Josse (1909) avec des condenseurs, mais donne des valeurs 1,5 plus grandes que Ser et trois fois plus grandes que Joule.

Les expériences les plus précises sont celles que Soennecken (1910) a exposées dans sa thèse. Il a utilisé aussi des tubes verticaux parcourus de haut en bas par l'eau. La longueur des tubes était de 1^m,92, et leurs diamètres respectifs, de 1^{cm},7 et 2^{cm},8 ; leur épaisseur était de 1 millimètre. Ces tubes étaient refroidis extérieurement par un courant d'eau. Pour déterminer la température de l'eau, Soennecken faisait quatre mesures avec des thermomètres en verre. La température du tube était évaluée par une méthode analogue à celle de Stanton, au moyen d'un « extensomètre » donnant la dilatation linéaire. Il a trouvé pour l'eau une formule analogue à celle de Stanton et à la première formule de Nüsselt, mais avec un seul binôme de température :

$$(123) \quad \alpha = B \frac{V^n}{D^{1-n}} (1 + 0,014 t_1),$$

t_1 étant la température moyenne de l'eau, V étant exprimé en mètres par seconde, et α en unités pratiques (calories-kgr., m², heures).

Avec le tube de laiton lisse, il a trouvé en moyenne ;

$$\begin{cases} B = 2.120 \\ n = 0,91, \end{cases}$$

avec les tubes de fer expérimentés, il a trouvé :

$$\begin{cases} B = 818 \\ n = 0,72 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B = 708 \\ n = 0,69. \end{cases}$$

Prenant la moyenne entre ces deux dernières déterminations, il a proposé pour le tube de fer moyennement rugueux :

$$\begin{cases} B = 735 \\ n = 0,70, \end{cases}$$

il a remarqué enfin que α était un peu plus petit quand l'eau avait un mouvement ascendant (dans le rapport : 0,935).

D'après cela, l'influence de la rugosité ne peut pas être négligée avec l'eau ; et les parois lisses favorisent l'activité des échanges de chaleur.

Il n'a pas été expérimenté d'autre liquide que l'eau.

5° Le problème du condenseur par surface. — Il nous reste à examiner, pour être à peu près complet, un problème fort intéressant, mais qui ne rentre pas dans le cadre de tout ce que nous avons dit jusqu'à présent : c'est celui de l'échange de chaleur entre une paroi et une vapeur condensante. Le changement d'état physique produit par la condensation a pour effet de provoquer un dégagement instantané et considérable de calories au contact même des tubes parcourus par l'eau de refroidissement, et par là même d'accélérer grandement les échanges de chaleur.

Déjà Ser avait reconnu avec son premier appareil, en faisant passer de la vapeur dans le manchon, que le coefficient de transmission α variait de 10.000 à 50.000, c'est-à-dire qu'il atteignait des valeurs très élevées. Avec le chauffage de l'eau par un serpentín de vapeur, il avait trouvé pour le coefficient global entre vapeur et eau des valeurs comprises entre 500 et 5.000, c'est-à-dire environ 1 à 10 kilogrammes de vapeur condensée par mètre carré et par heure. Mollier avait donné : $\alpha = 10.000$; et Poensgen : $\alpha = 3.000$ à 30.000.

Mais il faut arriver jusqu'à Nüsselt (1916) pour avoir une théorie des échanges de chaleur entre vapeur condensante et tubes de condenseur.

Cet auteur a d'ailleurs donné des formules purement



FIG. 32. — Le problème du condenseur par surface ; film d'eau sur une paroi verticale.

théoriques. Il s'est basé sur l'idée simplificatrice suivante : la chute de température entre paroi et vapeur se produit uniquement dans la traversée de la couche d'eau adhérente aux tubes ; si donc on admet que cette chute de température est constante tout le long d'un tube, il suffira de calculer l'épaisseur du film liquide en régime permanent pour résoudre le problème. D'après cela, le flux de chaleur sera inversement proportionnel à l'épaisseur de ce film. Ces hypothèses sont évidemment

inexactes, mais elles permettent d'aborder le problème théorique. Nous verrons plus loin qu'on peut en faire qui sont un peu différentes, mais qui conduisent sensiblement aux mêmes résultats. En particulier la température dans la vapeur

n'est pas uniforme, pas plus que la température superficielle du tube refroidi intérieurement par un courant d'eau. De plus, le ruissellement emporte des calories et active les échanges de chaleur.

Considérons par exemple avec Nüsselt un tube vertical, assimilable à une paroi plane verticale. Prenons l'axe Oz dirigé vers le bas, et l'axe Oy normal à la paroi. L'épaisseur du film sera une fonction de z . Le ruissellement étant supposé en régime permanent, on aura pour une couche dy en M , équilibre entre la force de viscosité et la pesanteur, ou, si w est la composante de la vitesse suivant Oz :

$$d\left(\eta \frac{dw}{dy}\right) + g\rho dy = 0,$$

ρ étant la masse spécifique de l'eau, et η son coefficient de viscosité. On en tire en intégrant, remarquant que la force de viscosité s'annule à la surface, et que par suite

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_0 = 0 :$$

$$w = \frac{g\rho}{2\eta} (2y_0y - y^2),$$

dont la moyenne sur la section M est :

$$(124) \quad w_m = \frac{g\rho}{3\eta} y_0^2.$$

Écrivant que l'échange de chaleur correspond à la quantité d'eau condensée par l'intermédiaire de la chaleur latente r de vaporisation, on aura, si K désigne la conductibilité de l'eau, et si on suppose la vapeur saturée :

$$(125) \quad Q = \frac{K(t_1 - t_0)}{y_0} = \rho r \frac{d}{dz} (w_m y_0),$$

d'où, remplaçant w_m par sa valeur et intégrant à partir

de $y_0 = 0$:

$$z = \frac{g \rho^2 r}{4 K (t_1 - t_0)} \cdot \frac{y_0^4}{4},$$

et par suite :

$$Q = (t_1 - t_0) \sqrt[4]{\frac{g \rho^2 r K^3}{4 \eta z (t_1 - t_0)}},$$

d'où on tire le coefficient vrai de convection :

$$\alpha_z = \sqrt[4]{\frac{g \rho^2 r K^3}{4 \eta z (t_1 - t_0)}}.$$

Le flux total de chaleur sur la hauteur z est :

$$\int_0^z Q dz = \frac{4}{3} z (t_1 - t_0) \sqrt[4]{\frac{g \rho^2 r K^3}{4 \eta z (t_1 - t_0)}},$$

et le coefficient moyen :

$$(126) \quad \alpha_0 z = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{g \rho^2 r K^3}{4 \eta z (t_1 - t_0)}} \cdot \frac{4}{3} \frac{K}{z} \sqrt[4]{\frac{r}{t_1 - t_0}} \cdot \frac{g \rho^2 z^3}{4 \eta K}.$$

Les constantes de l'eau qui interviennent dans ces formules doivent être prises à la température de condensation. On trouve ainsi la forme :

$$(126') \quad \alpha_0 z = \frac{B}{\sqrt[4]{z (t_1 - t_0)}}.$$

Contrairement à ce que nous avons vu jusqu'à présent, *l'échange de chaleur est proportionnel à une puissance de $(t_1 - t_0)$ inférieure à l'unité (0,75)*.

On a, d'après Nüsselt :

Pour l'eau.....	B = 8.900
Pour l'alcool.....	B = 2.300
Pour le benzol.....	B = 1.785

en unités pratiques (calories kg, mètre, heure).

Si nous faisons le calcul de B directement d'après la

formule (126), en prenant l'eau à 30° :

$$\begin{aligned} g &= 9,81 \times 3.600^2; \\ \rho &= 1.000; \\ r &= 578,8 \text{ calories-kilogrammes}; \\ K &= 0,50; \\ \eta &= 10^{-6} \times 75 \times 9,81 \times 3.600, \end{aligned}$$

nous trouvons une valeur un peu plus faible que celle proposée par Nüsselt :

$$B = 7.250.$$

Avec un tube incliné de l'angle β sur la verticale, il est facile de voir qu'il suffit de multiplier α par : $\sqrt[4]{\cos \beta}$.

Nous avons négligé l'influence de la vitesse de la vapeur sur y_0 ; Nüsselt a calculé l'effet de cette vitesse, qui diminue y_0 ; il a donné une table pour calculer dans ce cas les valeurs de α , qui croissent avec cette vitesse. Il a essayé de tenir compte de la chaleur emportée par le ruissellement; en calculant cette chaleur avec l'hypothèse d'une répartition linéaire des températures dans l'épaisseur du film, il a trouvé qu'il faudrait multiplier α par le facteur $\sqrt[4]{1 - \frac{5c(t_1 - t_0)}{r}}$, légèrement inférieur à l'unité (c : chaleur spécifique de l'eau) dans le cas du tube vertical. Par contre, il n'a pas tenu compte de ce que la valeur apparente du coefficient K était augmentée par la circulation superficielle.

Dans le cas d'une vapeur surchauffée condensante, l'équation qui donne Q devient :

$$Q = \frac{K(t_1 - t_0)}{y_0} = pr \frac{d}{dz} (w_m y_0) + \alpha' (t_2 - t_1),$$

t_2 étant la température de la vapeur surchauffée, t_1 la température de saturation pour la même pression, et α' le coefficient de convection entre vapeur et eau de con-

densation. On en tirera z en fonction de y_0 , d'après (124), d'où y_0 en fonction de z par une équation transcendante, et finalement Q .

Enfin Nusselt a traité le cas du tuyau cylindrique horizontal, surmonté ou non d'un autre tuyau ruisselant. Par la même méthode que ci-dessus, il a trouvé :

Pour un tuyau supérieur de diamètre D :

$$(127) \quad \alpha_m = 0,8024 \sqrt[4]{\frac{2g\rho^2 r K^3}{3\eta D (t_1 - t_0)}}.$$

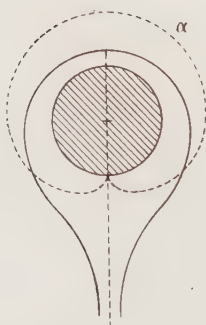


FIG. 33. — Tuyau horizontal supérieur.

— Épaisseur du film d'eau adhérent.
---- Variation du coefficient vrai α avec l'orientation.

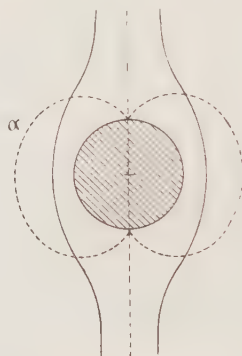


FIG. 34. — Tuyau horizontal intermédiaire.

— Épaisseur du film d'eau adhérent.
---- Variation du coefficient vrai α avec l'orientation.

Pour un tuyau intermédiaire placé directement sous un autre tuyau :

$$(128) \quad \alpha'_m = 0,545 \sqrt[4]{\frac{2g\rho^2 r K^3}{3\eta D (t_1 - t_0)}}.$$

valeur évidemment plus faible que la précédente, en raison de l'épaisseur moyenne plus grande du film. Le rap-

port de ces deux coefficients vaut :

$$\frac{\alpha'_m}{\alpha_m} = 0,68.$$

On aura cette fois, en unités pratiques :

$$\alpha_m \quad \text{ou} \quad \alpha'_m = \frac{C}{\sqrt[4]{D(t_1 - t_0)}}.$$

Faisant le calcul, pour l'eau, nous trouvons :

$$C = 5.580 \quad \text{ou} \quad 3.800.$$

Le rapport des flux totaux pour deux tubes identiques, l'un vertical, l'autre horizontal, est donc :

$$\frac{F_v}{F_h} = \frac{\alpha_0^3}{\alpha_m} = 1,62 \sqrt[4]{\frac{D}{z}}.$$

Chaque fois que le rapport de la longueur du diamètre sera plus grand que 6,85, le tube horizontal supérieur sera plus avantageux que le tube vertical. Si on avait pris α'_m au lieu de α_m , on aurait trouvé qu'il faut $\frac{z}{D} > 32$, pour que le tube horizontal soit avantageux.

La vérification expérimentale de ces résultats n'a pas été faite, mais Nusselt cite des expériences d'English et Donkin (1896) avec des cylindres d'acier ou de fonte de 75 millimètres de diamètre extérieur ; les écarts avec les formules varient de + 37 p. 100 à — 35 p. 100 environ.

Le même problème a été étudié par Parr (1921), qui suppose que le flux de chaleur Q est constant sur toute la surface du tube. Il en résulte que la différence de température $(t_1 - t_0)$ varie sur cette surface nécessairement.

Si nous prenons le cas du tube vertical, nous voyons

de suite que l'équation :

$$Q = cr \frac{d}{dz} (w_m y_0) = C',$$

avec :

$$w_m = \frac{g^2}{3\eta} y_0^2.$$

donne en posant :

$$\frac{Q}{cr} = A;$$

(A, débit d'eau condensée en volume par unité de surface du tube et par heure) :

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3\eta Az}{g^2}},$$

d'où le flux total de 0 à z :

$$\int_0^z Q dz = Qz = A cr z = \frac{g^2 r}{3\eta} y_0^3 = \frac{64}{81} \frac{g^2 r}{\eta} y_m^3.$$

(si y_m désigne la moyenne de y_0) et la variation de $(t_1 - t_0)$ avec z :

$$t_1 - t_0 = \frac{Q y_0}{K} = \frac{cr}{K} \sqrt[3]{\frac{3\eta}{g^2}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{3} z},$$

d'où :

$$\text{moy } (t_1 - t_0) = C^{te} \times A^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{z}.$$

Connaissant la valeur moyenne de $(t_1 - t_0)$, on en déduit le flux total par une formule identique à celle de Nusselt, ce qui montre que les deux procédés d'investigation sont à peu près équivalents.

Avec un tube horizontal, Parr trouve pour $(t_1 - t_0)$ une expression analogue :

$$\text{moy } (t_1 - t_0) = C^{te} \times A^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{D},$$

d'où il déduit une conséquence intéressante.

Avec une série de deux tubes horizontaux superposés, la moyennée de $t_1 - t_0$ sera proportionnelle à $\sqrt[3]{2D}$. Avec trois tubes elle sera proportionnelle à $\sqrt[3]{3D}$, et avec n tubes, on aura, en supposant que A reste le même :

$$\text{moy}(t_1 - t_0) = C^{te} \times A^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{nD}.$$

On en déduit, par un raisonnement approché, que l'épaisseur moyenne du film pour n tubes superposés verticalement est $\sqrt[3]{n}$ fois plus grande que celle du film pour le tube supérieur. Par suite, le film du second tube sera :

$$2(\sqrt[3]{2} - 1) + 1 = 1,52 = \frac{1}{0,658},$$

fois plus épais que celui du premier $\left(\text{Nüsselt avait trouvé } \frac{1}{0,68} \right)$. En réalité A diminue quand n augmente, et $(t_1 - t_0)$ croît moins vite que $\sqrt[3]{n}$.

En définitive, les formules de Nüsselt sont les plus intéressantes, mais il y aurait lieu de faire des essais expérimentaux pour les vérifier. On pourrait aussi les compléter en examinant d'autres dispositions de faisceaux de tubes, que celle où ces derniers sont situés sur des verticales ; par exemple, on traiterait par la méthode de Nüsselt le dispositif « Ginabat » destiné à rendre plus faible l'épaisseur du film ; dans ce dispositif, l'eau qui ruisselle d'un tube ne tombe pas normalement sur le tube immédiatement inférieur, mais arrive tangentielllement à ce dernier.

CHAPITRE VII.

ESSAI D'UNE THÉORIE DE LA CONVECTION
DANS UN TUBE AVEC MOUVEMENT TURBULENT.

Nous avons vu que la formule (120) de Nüsselt-Groeber ne saurait représenter une forme définitive du coefficient de convection α dans un tube. Elle ne parvient pas à expliquer les résultats de Jordan et de Poensgen. De plus, si l'on fait $\frac{D}{L}$ grand, on se rapproche du problème du corps plongé dans un courant fluide et l'exposant de V doit se rapprocher de $1/2$, comme l'indiquent les expériences et la théorie de Boussinesq. A ce point de vue, il est regrettable qu'aucun expérimentateur n'ait tenu compte des travaux de M. Leprince-Ringuet.

Formules générales relatives à un tube cylindrique quelconque. — Avant d'essayer une analyse un peu plus serrée du phénomène de turbulence, nous allons donner quelques

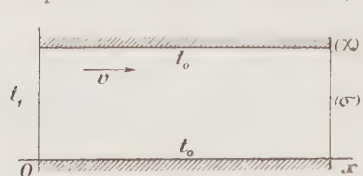


FIG. 35. — Le tube cylindrique quelconque avec mouvement turbulent du fluide.

formules générales se rapportant à un tube cylindrique de section quelconque. Soit σ l'aire de cette section, t_0 la température uniforme du tube, t_1 la température initiale, v , la composante supposée

connue de la vitesse parallèle aux génératrices en un point de cette section. La constance du débit en masse m nous permet de définir une vitesse moyenne v_m et une

densité moyenne ρ_m , par :

$$m = v_m \sigma \rho_m = \rho_m \int_{\sigma} v d\sigma = \int_{\sigma} \rho v d\sigma.$$

Le produit $\rho_m v_m$ est rigoureusement constant le long du tube.

La température moyenne sera définie logiquement par :

$$(129) \quad (t_m - t_0) \int_{\sigma} v \rho d\sigma = \int_{\sigma} (t - t_0) v \rho d\sigma.$$

Dès lors la connaissance de la variation de cette température moyenne le long du tube entraîne nécessairement celle du coefficient α . Si α_x désigne la moyenne de ce coefficient calculée le long du périmètre χ de la section x , on a :

$$(130) \quad -mcdt_m = \alpha_x (t_m - t_0) \chi dx = \chi Q dx,$$

car $-mcdt_m$ désigne exactement la perte de calories entre les sections x et $x + dx$.

On en tire la relation entre α_x et t_m :

$$(131) \quad \alpha_x = - \frac{mc}{\chi (t_m - t_0)} \frac{dt_m}{dx},$$

et inversement (nous considérons c comme une constante) :

$$\frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-\frac{\gamma}{mc} \int_0^x \alpha_x dx}.$$

On a également pour le flux par unité de surface et pour les coefficients moyens α_0^x et α'^x_0 :

$$(132) \quad Q = \alpha_x (t_m - t_0) = - \frac{mc}{\chi} \frac{dt_m}{dx};$$

$$\alpha_0^x = \frac{2mc}{\chi x} \cdot \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{1 + \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}, \quad \text{et} \quad \alpha'^x_0 = \frac{mc}{\chi x} \cdot \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{\frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0} \right) dx}.$$

Si t_0 est variable, on peut utiliser, généralisant l'approximation que nous avons indiquée, une température fictive $t'_0(x)$ ayant la même valeur que t_0 pour $x = 0$, et variant plus vite (donnée par exemple par les équations 101' et 102'), pour calculer Q . La température moyenne t_m est alors fournie par l'équation différentielle :

$$Q = - \frac{mc}{\gamma} \frac{dt_m}{dx} = \alpha_x [t_m - t'_0(x)].$$

Nous donnerons plus loin de ce cas une solution plus exacte, grâce à la séparation du flux calorifique en deux parties (flux dû aux vitesses moyennes, et flux dû à la turbulence).

De ces formules découle naturellement la *notion approximative du tube circulaire équivalent*. Avec un tube circulaire, le rapport $\frac{m}{\gamma}$, c'est-à-dire :

$$\rho_m v_m \frac{\sigma}{\gamma},$$

est remplacé par :

$$\rho_m v_m \cdot \frac{\pi D^2}{4 \cdot \pi D} = \rho_m v_m \frac{D}{4},$$

d'où la loi d'équivalence :

$$(133) \quad D = \frac{4\sigma}{\gamma} = 4 \times \frac{\text{Surface de la section}}{\text{Périmètre d'échange de chaleur}}.$$

Jordan a montré dans ses essais la légitimité d'une telle loi avec des couronnes circulaires dont le grand cercle seul comptait comme périmètre d'échange. Nusselt, en 1913, par des considérations théoriques utilisant la notion de « Grenzsicht » ou « film » de Prandtl, a cru pouvoir conclure que cette loi avait une portée générale et s'appliquait à toutes les formes de section. Autrement dit, on pourrait, sans autre forme de procès, appliquer

aux tubes cylindriques quelconques, les résultats trouvés pour les tubes circulaires, à condition de remplacer partout dans les formules le diamètre D par le rapport $\frac{4\sigma}{Z}$.

Cette loi serait valable en particulier pour les sections rectangulaires dont le périmètre concourt partiellement ou totalement aux échanges.

Une vérification expérimentale s'impose. Nous croyons que cette formule doit donner des résultats convenables quand le périmètre d'échange comporte tout un contour de la section, mais qu'il peut fort bien ne pas en être de même quand il ne concerne qu'une partie de ce contour, car alors la dissymétrie devient grande. De toute façon, on ne saurait *a priori* l'appliquer, au cas du tube à ailettes intérieures (par exemple aux tubes Serve des locomotives), en raison de la grande influence que ces ailettes ont sur le mouvement du fluide et parce que la température superficielle intérieure ne sera jamais uniforme dans une section.

Quand cette formule est applicable, on peut prendre, pour les coefficients α envisagés dans le cas général, les valeurs qui conviennent aux tubes circulaires. Alors le problème du cylindre quelconque se trouve complètement résolu par les équations que nous venons de donner.

Nous avons bien généralisé les formules théoriques au cas du tube de forme quelconque, mais seulement quand il existe un potentiel de vitesses, et quand la vitesse est suffisante. On ne saurait étendre ces résultats au cas du mouvement turbulent.

Caractères d'un mouvement turbulent, permanent et uniforme. — Prenons, par exemple, un tube cylindrique circulaire parcouru par un fluide de vitesse franchement supérieure à la vitesse critique de Reynolds. Le régime

turbulent ou « hydraulique » dont ce tube est le siège est un mouvement tourbillonnaire. C'est encore M. Boussinesq qui a mis le premier en équation les phénomènes de turbulence. En un point, il considère ce qu'il appelle la *moyenne locale de la vitesse*, la seule que l'on ait su introduire avant lui dans les formules. A cette moyenne locale se superpose une *vitesse d'agitation locale* dénuée de direction déterminée, et de valeur moyenne nulle. (De même, il définit des accélérations et des pressions moyennes locales). Or, ces vitesses moyennes locales seront, dans le cas qui nous concerne, très sensiblement parallèles à l'axe.

Nous citerons textuellement un passage de Boussinesq, tiré de son *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Ce passage se rapporte à un canal, mais on peut admettre, avec l'auteur lui-même, qu'un canal représente la moitié inférieure d'un tube horizontal, par raison de symétrie :

« Si l'on considère, par exemple, la surface libre d'une eau trouble coulant dans un canal, on voit sans cesse des volumes fluides de dimensions petites, mais finies, un instant adhérentes aux parois, s'en détacher tout à coup et se propager de plus en plus vers l'intérieur en formant un ou plusieurs tourbillons à axes verticaux. On observe aussi, surtout vers le milieu du canal, des bouillons ou tourbillons à axe horizontal, partis du fond, et qui émergent un instant au-dessus de la surface libre pour replonger aussitôt. Le trouble apporté à l'écoulement, et en vertu duquel des mouvements de sens alternativement opposés se superposent à la translation générale, qui seule est représentée en chaque point par la vitesse moyenne locale, provient donc surtout d'un nombre fini, mais très grand, de tourbillons produits près des parois et propagés de là. »

« D'après cela, l'agitation tourbillonnaire dépendra de beaucoup de causes. Et d'abord, celle qui est produite en un point d'une paroi doit varier : 1° avec la vitesse moyenne locale en ce point (vitesse que nous pouvons confondre avec sa composante longitudinale u_0), car cette vitesse mesure l'impulsion moyenne qui a donné naissance aux tourbillons et qui leur communique leur force vive (cette vitesse doit même atteindre une certaine valeur pour que l'agitation naisse ; des expériences de Darcy, Osborne Reynolds, Couette ont en effet montré que les mouvements sont bien continus, même dans des tubes de plus d'un centimètre carré de section, mais polis, jusqu'à une limite supérieure de vitesse qui est en raison inverse du diamètre) ; 2° avec la grandeur du rapport $\frac{\tau}{\chi}$ de la

section normale fluide τ à son contour mouillé χ , rapport qui mesure l'étendue de section correspondant à l'unité de contour mouillé, car cette grandeur favorise les mouvements oscillatoires, perpendiculaires à la paroi (ou mouvements de ballonnement), qui tendent à en détacher les groupes moléculaires, et sans lesquels l'action tangentielle exercée par la paroi sur ces groupes n'éprouverait point de variations brusques ; or ce doivent être ces variations, combinées avec la translation générale du liquide, qui impriment aux particules fluides des mouvements giratoires ; 3° avec le degré de poli de la paroi considérée ; plus celle-ci est rugueuse, plus elle doit, en heurtant les volumes liquides adjacents, produire des tourbillons et concourir ainsi à la formation des mouvements oscillatoires dont il vient d'être parlé. »

Après cette remarquable analyse, Boussinesq ajoute qu'il est naturel de supposer que le degré d'agitation qui se propage à partir de la paroi se conserve sensiblement de couche en couche ; comme, avec un tuyau circulaire, la surface des couches décroît comme le rayon, l'agitation

se concentre suivant le rapport $\frac{R}{r}$ inverse de celui des aires.

D'après cela la turbulence du mouvement sera mesurée par un coefficient ε appelé par Boussinesq, « coefficient de frottement intérieur », et en Angleterre, « coefficient de turbulence », ce coefficient jouant un rôle analogue à celui du coefficient de viscosité dans les mouvements tranquilles; il a les mêmes dimensions. Son expression approchée est, pour un tube circulaire :

$$\varepsilon = \varepsilon g \frac{\sqrt{B}}{k} \cdot \frac{R}{2} \cdot v \cdot \frac{R}{r};$$

B, mesurant la rugosité de la paroi, est le coefficient de la formule $\varepsilon g B V^2$ qui donne la force de frottement entre paroi et fluide de vitesse V. Le coefficient k dépend de la nature du fluide.

La variation de la vitesse moyenne locale dans une section circulaire a été trouvée par Bazin égale, d'après l'expérience, à une expression de la forme :

$$(134) \quad v = V_0 - \frac{2}{3} k \frac{r^3}{R^3} \sqrt{1 \frac{R}{2}},$$

V_0 étant la vitesse maxima (dans l'axe), et I la pente motrice :

$$I = - \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p_0}{\varepsilon g} \right) = \frac{Z}{\sigma} b v_m^2 = \frac{2}{R} b v_m^2.$$

Cette formule a été retrouvée par la théorie. On a d'ailleurs la relation

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{B}} - 0,4215 \cdot k,$$

pour l'eau : $k = 48,6$ C. G. S.).

v_m est la vitesse moyenne dans la section.

On en tire le rapport entre la vitesse moyenne v_m et la vitesse maxima V_0 :

$$\frac{V_0}{v_m} = 1 + \frac{4}{15} k \sqrt{b}.$$

Ce rapport augmente avec la rugosité B du tubé. Pour l'eau, il est voisin de 1,2. Ainsi, dans le régime turbulent, la vitesse moyenne locale est loin de suivre la loi de variation parabolique de Poiseuille dans une section. La vitesse au voisinage immédiat de la paroi (abstraction faite du film très mince où cette vitesse tombe à zéro très rapidement) est encore, pour l'eau, de l'ordre des $3/5$ de la vitesse moyenne. La courbe représentant la variation de cette vitesse dans la section a d'ailleurs plutôt la forme elliptique. L'expérience montre même que, pour l'air à de grandes vitesses, cette ellipse est très aplatie dans le sens du mouvement. On voit ainsi que, plus la vitesse est grande, et plus l'on se rapproche de la loi de la vitesse uniforme dans une section. Une théorie approchée de la transmission de chaleur devra donc faire de préférence cette dernière hypothèse, conforme d'ailleurs à la théorie de Prandtl dont nous avons parlé plus haut.

Convection dans un tube circulaire avec mouvement turbulent. — Quel sera le rôle des tourbillons dans le transport des calories? Ces tourbillons ont pour effet, d'une part, d'accélérer considérablement l'uniformisation de température dans leur zone d'action, et d'autre part, grâce à leur déplacement centripète, de créer un véritable transport de chaleur de la périphérie vers la partie axiale du tube. Cette double influence peut se mesurer, d'une part, par l'intensité du tourbillon, et d'autre part, par la vitesse moyenne de déplacement des tourbillons.

Le second facteur étant vraisemblablement une fonction du premier, nous sommes ramené à une seule

variable que l'on peut prendre proportionnelle au coefficient de turbulence ε défini plus haut de façon approximative. Pour donner à cette variable les dimensions d'une vitesse, il sera logique de prendre l'expression :

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \propto \frac{2}{R} = g \frac{\sqrt{B}}{k} \cdot \frac{R}{r} \cdot v = C^{te} \propto \frac{R}{r} \cdot v,$$

v étant la vitesse moyenne locale vraie.

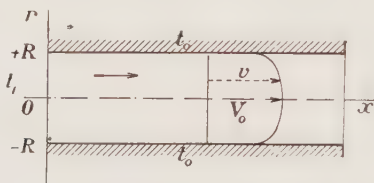


FIG. 36. — Le tube circulaire ; graphique de la vitesse dans une section en mouvement turbulent.

Dès lors l'équation de la transmission de chaleur pourra s'écrire approximativement, en appelant V la vitesse moyenne sur la section :

$$(135) \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) = V \frac{\partial t}{\partial x} + r' \frac{\partial t}{\partial r}.$$

r' étant négatif et de la forme :

$$r' = -V\psi \left(g \frac{\sqrt{B}}{k} \frac{R}{r} \frac{v}{V} \right).$$

On ne peut pas ici remplacer v par V en raison des valeurs élevées de $\frac{\partial t}{\partial r}$ à la paroi (tandis que $\frac{\partial t}{\partial x}$ s'y annule) ; il faut au contraire tenir compte de la variation de la fonction ψ qui s'annule pour : $r = R$.

Nous allons tirer de là une équation encore plus approximative, mais facilement intégrable. Tenant compte de ce que $\frac{\partial t}{\partial r}$ ne prend d'importance qu'au voisinage de la paroi, nous pouvons le remplacer par l'expression :

$$-\frac{t - t_0}{R - r}.$$

Si nous admettons qu'on peut y écrire aussi que la fonction ψ est proportionnelle à la distance $(R - r)$ à la paroi, nous voyons qu'au voisinage de la surface intérieure du tube, l'expression $v' \frac{\partial t}{\partial r}$ sera approximativement proportionnelle à :

$$\frac{t - t_0}{R} \propto v.$$

Finalement, nous aurons l'équation :

$$(136) \quad \frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{\partial t}{\partial x} + h \frac{t - t_0}{R},$$

h étant une constante positive. D'après ce qui précède, h sera fonction de $g \frac{\sqrt{B}}{k}$, et dépendra de la loi de variation de la vitesse moyenne locale dans la section. Autrement dit, h dépendra de la rugosité de la paroi, de la nature du fluide, et du rayon R du tube ; h dépendra aussi de la température, mais par l'intermédiaire de B et de k . De plus, la théorie ci-dessus supposant implicitement que le tube est horizontal, il faut s'attendre à ce que, dans la réalité, la constante h varie un peu avec l'inclinaison du tube sur l'horizontale et le sens (ascendant ou descendant) du parcours du fluide. Enfin, l'intensité du tour-

billonnement à l'amont, avant l'entrée du tube, doit avoir aussi une influence sur h .

Cette équation s'intègre à l'aide des résultats du problème théorique déjà résolu. En effet, si l'on pose, t_0 étant supposée constante :

$$u = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} e^{\frac{h}{R} x},$$

u vérifiera l'équation :

$$\frac{a^2}{V} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} u = 1 \text{ pour } x = 0, & \text{et} & -R < r < +R; \\ u = 0 \text{ pour } r = \pm R, & \text{et} & x > 0. \end{array}$$

La solution en u est donc, si les μ_k sont les racines de la fonction J_0 de Bessel :

$$u = - \sum_1^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \frac{1}{J_0(\mu_k)} e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2} x} \cdot J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right), \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{V}{x}}.$$

On en tire de suite la valeur de t , et celle de la température moyenne t_m :

$$\frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-\frac{h}{R} x} \times 4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2} x}.$$

Le flux de chaleur par unité de surface est :

$$\begin{aligned} (137) \quad Q &= - \frac{mc}{\chi} \frac{dt_m}{dx} = - \frac{Rc\rho V}{2} \cdot \frac{dt_m}{dx} \\ &= \frac{2Rc\rho V}{x} (t_1 - t_0) e^{-\frac{h}{R} x} \left[\frac{1}{\lambda^2} \sum e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2} x} + \frac{hx}{R} \sum \frac{e^{-\frac{\mu_k^2}{\lambda^2} x}}{\mu_k^2} \right]. \end{aligned}$$

et le coefficient vrai de convection :

$$(138) \quad \alpha_x = \frac{Q}{t_m - t_0} = \frac{h}{2} c \rho V + \frac{1}{2} \frac{K}{R} \cdot \frac{\sum e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\sum \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\mu^2}}.$$

On voit ainsi apparaître, à côté du rapport des deux séries, un terme additif proportionnel à la vitesse.

Le flux moyen Q_m entre 0 et x , sera :

$$\frac{1}{x} \int_0^x Q dx = \frac{R c \rho V}{2x} (t_1 - t_m) = \frac{K}{2R} \lambda^2 (t_1 - t_0) \left[1 - e^{-\frac{h}{R}x} \times 4 \sum \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\mu^2} \right],$$

et le coefficient moyen se rapportant à la moyenne $\frac{t_1 + t_m}{2}$:

$$(139) \quad \alpha_0^x = \frac{2mc}{\lambda x} \cdot \frac{1 - \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}}{1 + \frac{t_m - t_0}{t_1 - t_0}} = \frac{K}{R} \lambda^2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{R}x} \times 4 \sum \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\mu^2}}{1 + e^{-\frac{h}{R}x} \times 4 \sum \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\mu^2}}.$$

Le coefficient α_0^x se rapportant à la véritable température moyenne du fluide serait donné par une expression un peu plus compliquée ; sa différence avec α_0^x devient négligeable, dès que la vitesse V est assez grande.

Le problème posé est ainsi théoriquement résolu.

Quand la variable λ est supérieure à 9, on peut écrire, d'après les considérations exposées plus haut au problème purement théorique, et en négligeant $\frac{1}{\lambda^4}$:

$$\begin{aligned} 4 \sum e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}} &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} - 1; \\ 4 \sum \frac{e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}}{\mu^2} &= 1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

et par suite :

$$(140) \left\{ \begin{aligned} Q_m &= \frac{1}{x} \int_0^x Q dx = \frac{K}{2R} \lambda^2 (t_1 - t_0) \left[1 - e^{-\frac{h}{R} x} \left(1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]; \\ Q &= \frac{K}{2R} (t_1 - t_0) \left[\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} - 1 + \frac{hx}{R} \left(\lambda^2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} + 1 \right) \right] e^{-\frac{h}{R} x}; \\ \alpha_x &= \frac{K}{R} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} - \frac{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}}{1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{x}{R} \lambda^2 \right]; \\ \alpha_0 x &= \frac{K}{R} \lambda^2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{R} x} \left(1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2} \right)}{1 + e^{-\frac{h}{R} x} \left(1 - \frac{4}{\lambda \sqrt{\pi}} + \frac{1}{\lambda^2} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (140) montrent que les coefficients $\propto \frac{R}{K}$ ne sont plus uniquement fonctions de λ , mais aussi de $\frac{x}{R}$. Elles résolvent complètement le problème posé, quand $\lambda > 9$, et $t_0 = C^{10}$, à condition de demander à l'expérience la valeur d'une seule constante, h . Elles montrent clairement que les coefficients de convection sont proportionnels à une puissance de λ comprise entre 1 et 2, c'est-à-dire à une puissance de V comprise entre $1/2$ et 1.

À l'approximation faite pour écrire l'équation du problème, on peut sans doute simplifier ces formules et les réduire à la valeur qu'elles prennent pour λ grand.

Ce sont d'ailleurs ces valeurs de λ qui sont intéressantes dans la pratique; dans les expériences de Nüsselt, on avait $\lambda > 10$ dans la zone où ces expériences donnaient des résultats concordants.

Les valeurs limites des coefficients de convection

pour λ grand sont :

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc_p V}{x}} + \frac{h}{2} c_p V. \\ \alpha_{0^x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc_p V}{x}} + \frac{h}{2} c_p V. \end{array} \right.$$

Nous trouvons ainsi que les coefficients de convection s'expriment approximativement par une formule binôme de la forme :

$$(142) \quad \alpha = A \sqrt{V} + B \cdot V,$$

en fonction de la vitesse V , le premier terme du second membre étant dû à l'effet des vitesses moyennes locales, et le second, à l'effet de la turbulence.

Une telle formule binôme peut être remplacée dans un domaine restreint par une expression monôme $A'V^n$, avec $0,5 < n < 1$. Cela explique que les expérimentateurs aient pu mettre leurs résultats, le plus souvent, sous cette dernière forme.

Les formules (141), valables pour un mouvement franchement turbulent, concordent bien avec les considérations d'homogénéité. On peut écrire par exemple :

$$(143) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{D}{K} \alpha_{0^x} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \sqrt{\frac{Dc_p V}{K}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{Dc_p V}{K} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \sqrt{\frac{VD}{a^2}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{VD}{a^2}, \end{aligned}}$$

qui montre les deux variables principales :

$$\frac{Dc_p V}{K} = \frac{1}{Pe}, \quad \text{et :} \quad \frac{D}{x}. \quad (D = 2R).$$

Sous cette forme, on peut tracer un graphique analogue

à celui qui nous a servi à comparer entre elles les expériences, en portant en abscisses :

$$\log \frac{Dc\rho V}{K} ;$$

et en ordonnées :

$$\log \frac{D}{K} \alpha_0^x.$$

On voit que l'on obtiendra une série de courbes correspondant aux diverses valeurs de $\frac{D}{x}$, à condition de connaître h . Un graphique analogue peut être dressé en partant des formules (140).

Pour appliquer toutes ces formules, on prendra des valeurs moyennes de c et de K , et pour le produit ρV , la valeur exacte du débit en masse par unité de section.

Critique de la formule binôme (143) à laquelle nous sommes parvenu. — *Interprétation des expériences.* —

Quand $\frac{D}{x}$ augmente, $\frac{D}{K} \alpha_0^x$ augmente si Pe reste constant; l'importance du premier terme du second membre de (143) augmente, et la loi de transmission se rapproche de la proportionnalité à $\sqrt{V}$.

Au contraire, pour $\frac{D}{x}$ très petit, la transmission se rapprochera de la proportionnalité à la vitesse; cela est évident *a priori* et nous l'avons montré pour $\lambda < 1$, dans le cas du mouvement tranquille; mais on voit que cela peut arriver même si λ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{x} \frac{1}{Pe}},$$

est supérieur à 1 et dans le domaine d'applicabilité de la formule (143). Cette formule est donc capable d'expli-

quer au moins qualitativement les résultats de Jordan avec des diamètres différents D et une même longueur x .

Nous pouvons poser dans un intervalle restreint :

$$\alpha_0^x = A' (\rho V)^n,$$

c'est-à-dire :

$$\log \alpha_0^x = \log A' + n \cdot \log (\rho V),$$

avec :

$$(144) \quad n = \frac{d(\log \alpha_0^x)}{d(\log \rho V)} = \frac{1 + \frac{2}{h} \sqrt{\frac{K}{\pi c \rho V x}}}{1 + \frac{4}{h} \sqrt{\frac{K}{\pi c \rho V x}}} = \frac{1 + \frac{2}{h \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \cdot Pe}{1 + \frac{4}{h \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \cdot Pe}.$$

Pour une valeur déterminée de l'abscisse, c'est-à-dire de Pe , n est la forme :

$$n = \frac{1 + H \sqrt{\frac{D}{x}}}{1 + 2H \sqrt{\frac{D}{x}}}, \quad \text{avec} \quad H = \frac{2}{h \sqrt{\pi}} \sqrt{Pe}.$$

Si on suppose h indépendant de D , alors H est une constante quand Pe reste fixe. Si on suppose h inversement proportionnel à $\sqrt{D}$, on retrouve la loi de variation de n trouvée par M. Leprince-Ringuet, pour x constant :

$$n = \frac{1 + H' \cdot D}{1 + 2H' \cdot D},$$

avec H' constant :

$$H' = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{Pe}{\pi D x}}.$$

Mais nous voyons qu'il n'est pas nécessaire, pour vérifier cette loi, d'avoir effectivement un exposant n variable avec le diamètre dans la formule qui donne α .

La formule (143), avec des bases théoriques solides, est d'ailleurs capable de représenter les expériences beau-

coup mieux que celle de Nüsselt-Groeber, et pour l'ensemble des fluides expérimentés.

Ainsi les expériences de Nüsselt seront représentées par :

$$\frac{D}{K} \alpha = 0,217 \sqrt{\frac{VD}{a^2}} + \frac{h}{2} \frac{VD}{a^2},$$

puisque l'on avait : $\frac{D}{x} = \frac{1}{27}$, dans ses expériences. En prenant $\frac{h}{2} = 0,00186$, on obtient une représentation satisfaisante dans le domaine $4 < \log \frac{VD}{a^2} < 5$, qui correspond à celui où les expériences aux diverses pressions concordent.

Les résultats numériques de Jordan s'interpréteront encore approximativement par la formule (143), mais à condition de prendre pour $\frac{h}{2}$ une valeur constante et un peu plus élevée que pour Nüsselt ($\frac{h}{2} = 0,00275$), ce qui doit être dû principalement à ce que les chiffres de Jordan sont un peu trop forts. Les courbes relatives aux diverses valeurs de $\frac{D}{x}$ se placeront bien dans l'ordre où le graphique expérimental de la *fig.* 31 les indique.

Les expériences de Groeber, Rietschel et Josse rentrent aussi facilement que celles de Nüsselt dans le cadre de la formule (143).

On prendra :

Avec Josse.....	$\frac{h}{2} = 0,00230;$
Avec Rietschel.....	$\frac{h}{2} = 0,00208;$
Avec Groeber.....	$\frac{h}{2} = 0,00186;$

approximativement. Les essais du Nüsselt avec le gaz carbonique et le gaz d'éclairage, quoique moins précis et moins complets, donneraient encore pour h des valeurs du même ordre.

Remarquons qu'avec les valeurs choisies pour h , la formule (144) donne pour n des valeurs convenables, ce qui est une vérification réelle de notre théorie. Ainsi, pour les expériences les plus précises, celles de Nüsselt avec l'air : -

Avec : $\frac{D}{x} = \frac{1}{27}$ et : $\frac{h}{2} = 0,00186$, on trouve en effet :

$$\text{pour } Pe = \frac{1}{10^4} \dots\dots\dots n = 0,730;$$

$$\text{pour } Pe = \frac{1}{10^5} \dots\dots\dots n = 0,865;$$

$$\text{pour } Pe = \frac{1}{10^{6,5}} \dots\dots\dots n = 0,802.$$

La moyenne de ces trois valeurs est : $n = 0,799$, chiffre très voisin de celui de Nüsselt : $n = 0,786$, et de celui de Rietschel et de Groeber : $n = 0,79$.

L'influence de la variation de la longueur x (ou L) du tube n'a jamais été étudiée systématiquement. La formule Nüsselt-Groeber fournit pour x un exposant ($-0,05$) très faible; M. Leprince-Ringuet propose la valeur ($-0,13$). D'après notre formule, l'exposant de x dans une formule monôme équivalente serait égal à : $-(1-n)$, c'est-à-dire voisin de ($-0,20$).

L'influence de la variation du diamètre sur α a été étudiée, nous l'avons vu, surtout par Jordan, Rietschel, Holmboe et Poensgen. La valeur moyenne de l'exposant n' de $\frac{1}{D}$ dans l'expression du coefficient de convection a été trouvée égale à 0,16 par Rietschel et Holmboe.

Les formules (141) ne contiennent pas D explicitement ;

il résulte ainsi des expériences comme de la théorie, que le coefficient h doit dépendre de D ; ces expériences nous apprennent de plus que h décroît quand le diamètre augmente. On aurait par exemple :

$$h = \frac{C^{1e}}{D^{n_1}},$$

avec n_1 voisin de 0,25, si $n' = 0,16$, d'après la relation :

$$n' = n_1 \left[1 - \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Kc\varepsilon V}{x}}}{\alpha_0 x} \right].$$

D'après la formule de M. Leprince-Ringuet, on aurait : $n_1 = 0,50$ exactement, comme nous l'avons vu à propos de l'expression de l'exposant n . Ceci donnerait n' voisin de 0,3, ce qui, d'après Rietschel, est une valeur nettement trop élevée. En réalité, la valeur 0,16 de n' est encore approximative, et les expériences de Jordan ne la confirment pas.

Des diverses considérations générales développées dans ce chapitre et de ce dernier résultat on peut déduire que *l'expression probable du coefficient h chargé d'exprimer l'influence de la turbulence sur les échanges de chaleur, est de la forme suivante* (avec n_1 voisin de 0,25) :

$$(145) \quad h = \varphi \left(g \frac{\sqrt{B}}{k} \right) \times \frac{1}{D^{n_1}},$$

B étant le coefficient de rugosité de la paroi, k dépendant de la nature du fluide; et φ étant une fonction à déterminer, qui dépend d'ailleurs de l'inclinaison du tube, du sens du courant fluide et de la turbulence à l'amont. Les formules (140) ont donc encore l'avantage d'introduire l'influence de la rugosité. Cette influence, dans le cas d'un gaz, n'a jamais été étudiée systématiquement.

D'une part, la rugosité augmente le tourbillonnement, c'est-à-dire la turbulence du mouvement; d'autre part, elle modifie la loi de variation de la vitesse moyenne locale sur la section. Le premier effet tend à activer les échanges de chaleur, tandis que le second, en diminuant les vitesses moyennes près de la paroi, a une action contraire. On ne peut pas dire *a priori* lequel des deux est prépondérant. Seules les expériences de Soennecken avec l'eau nous donnent le sens de variation de h avec la rugosité B , sans d'ailleurs pouvoir nous fournir la relation approchée qui relie ces deux grandeurs. Avec un tube de fer moyennement rugueux, il a trouvé que le coefficient α étant nettement plus faible qu'avec un tube de mêmes dimensions en laiton lisse, et de plus, que l'exposant n de la vitesse dans l'expression de ce coefficient, était aussi plus faible dans le premier cas que dans le second. Le second effet de la rugosité était donc prépondérant.

Nous en concluons que pour l'eau, h diminue quand B augmente, et par suite, que la fonction inconnue φ est décroissante dans ce cas; la formule (144) montre que n diminue dans les mêmes conditions.

Toute indication manque sur l'allure de cette fonction avec les gaz. Nous voyons simplement que $\frac{h}{2}$ varie peu avec l'air et que ses variations doivent être attribuées, partie aux variations du diamètre D , partie aux rugosités différentes de paroi, partie à la turbulence à l'amont, sans que nous soyons en mesure de faire la discrimination exacte de ces trois effets, puisque nous ne connaissons pas les coefficients B des expériences, et qu'il faudrait du reste pour cela des essais très précis et systématiques.

Il y a d'ailleurs un accord intéressant entre les formules (143) et les résultats obtenus par Soennecken avec ses tubes de fer et de laiton de 1^m,92 de longueur. Si nous prenons le diamètre $D = 2^{\text{cm}},8$, ces résultats s'é-

crivent à 0° , pour le tube de laiton lisse :

$$\alpha = 2.825 \cdot V^{0.91};$$

pour le tube de fer :

$$\alpha = 2.145 \cdot V^{0.70}.$$

La formule (141) donne alors, avec V en mètres par seconde :

$$\alpha = 1.115 \sqrt{V} + \frac{h}{2} \cdot 3.6 \times 10^6 \cdot V.$$

Faisons la comparaison pour $V = 5$ mètres, avec les formules précédentes, en prenant :

$$K = 0.52; \quad c = 1; \quad \rho = 1.000;$$

on trouve pour le tube de laiton :

$$\frac{h}{2} = 5.39 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad n = 0.897 \text{ (au lieu de } 0.91).$$

pour le tube de fer :

$$\frac{h}{2} = 2.28 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad n = 0.81 \text{ (au lieu de } 0.70).$$

La concordance est très bonne pour le tube lisse, et moins satisfaisante pour le tube rugueux, mais tout de même très intéressante. Remarquons encore qu'entre deux fluides aussi divers que l'eau et l'air, le coefficient $\frac{h}{2}$ ne varie que du simple au décuple, ce qui est à noter.

Montrons enfin que les expériences de Poensgen elles-mêmes, avec la vapeur d'eau, peuvent être aussi interprétées par la formule (143). Le graphique logarithmique qui en porte les résultats moyens accuse une pente de la courbe nettement supérieure à la pente des autres courbes se rapportant à l'air. La formule de Nüsselt-Groeber ne

sauroit expliquer ce fait. Nous en trouverons facilement la raison en considérant que Poensgen a fait des expériences avec des tubes très longs ($3^m,50$) et que le rapport $\frac{x}{D}$ avait une valeur très grande : 89, pour le tube de $3^m,94$. La formule (144) montre en effet que dans ce cas n se rapproche de l'unité. Essayons de représenter les résultats de Poensgen dans les limites de ses expériences, en écrivant la formule (143), avec : $\frac{x}{D} = 89$:

$$\frac{D}{K} \alpha_0^x = 0,1195 \cdot \sqrt{\frac{VD}{a^2}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{VD}{a^2}.$$

Si nous prenons une abscisse moyenne :

$$\log \frac{VD}{a^2} = 4,5,$$

le coefficient $\frac{h}{2}$ aura la valeur suivante, très voisine de celles qui ont été trouvées pour l'air :

$$\frac{h}{2} = 2,49 \times 10^{-3},$$

et l'exposant n de la vitesse sera égal, d'après (144), à :

$$n = 0,894,$$

chiffre extrêmement voisin de la valeur 0,892 donnée par Poensgen lui-même. Donc les expériences de Poensgen avec la vapeur d'eau vérifient elles-mêmes de façon aussi satisfaisante que possible la formule que nous avons proposée pour le coefficient α .

En définitive, grâce à la formule :

$$\frac{D}{K} \alpha_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \sqrt{\frac{VD}{a^2}} + \frac{h}{2} \frac{VD}{a^2},$$

et à la relation hypothétique :

$$h = \varphi \left(g \frac{\sqrt{B}}{k} \right) \times \frac{1}{D^{n_1}},$$

nous sommes arrivé à représenter tous les résultats d'expérience, pour les divers fluides expérimentés (air, eau, vapeur d'eau), avec une approximation tout à fait satisfaisante, par une formule qui, somme toute, ne comporte qu'un seul paramètre à demander provisoirement à l'expérience.

Ce paramètre h varie d'ailleurs dans des limites très restreintes pour l'ensemble des liquides et des gaz usuels. Par suite, la formule (143) présente un réel intérêt théorique et pratique. Les formules équivalentes (141) seront d'ailleurs applicables dans le cas d'une température de paroi non uniforme, grâce à une correction affectant seulement leur premier terme, en utilisant, pour calculer la fraction des flux calorifiques due aux vitesses moyennes locales, une température fictive de paroi qui varie plus vite que la température réelle, et donnée par l'équation (101'), ou une température moyenne de paroi donnée par la formule (102'). Mais les corrections indiquées par (101') ou (102') ne sauraient s'appliquer à la fraction des flux calorifiques due à la seule turbulence du mouvement. On pourra étendre encore ces formules au cas du tube cylindrique de section quelconque chaque fois que la formule d'équivalence (133) sera valable. Ainsi le problème du tube pourra être considéré comme complètement résolu quand on connaîtra la constante h . Théoriquement, il sera d'ailleurs préférable d'employer les formules (140), plus exactes.

Le graphique de la figure 37 donne l'interprétation des expériences de Nüsselt, Jordan et Poensgen avec la formule (143); il est à comparer à celui de la fig. 31;

nous aurions pu y joindre celle des résultats de Groeber, Rietschel et Josse, mais les courbes obtenues se seraient sensiblement superposées les unes aux autres. On obtient

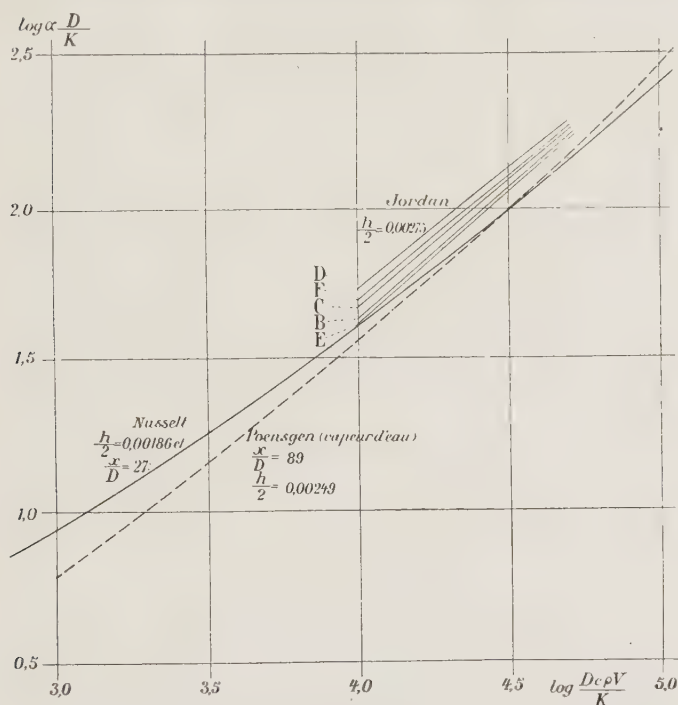


FIG. 37. — Essai d'interprétation des expériences de transmission de chaleur dans un tube avec la formule binôme (143) :

$$\alpha_0 x \cdot \frac{D}{K} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{x}} \sqrt{\frac{Dc\rho V}{K}} + \frac{h}{2} \cdot \frac{Dc\rho V}{K}.$$

en réalité pour Jordan des coefficients angulaires trop élevés, dus à ce que les chiffres de Jordan sont eux-mêmes trop forts, comme nous l'avons déjà exposé, mais dans une mesure qu'il n'est plus possible d'évaluer exactement, de sorte que le coefficient $\frac{h}{2}$ choisi égal à 0,00275 est trop fort, sans que nous puissions le corriger.

REMARQUE. — *Généralisation.* — Il est à penser que, pour le cas de la circulation d'un fluide à travers un faisceau tubulaire, une formule binôme analogue à la seconde formule (141) et présentant la même généralité pourra être écrite : son premier terme, dû aux vitesses moyennes locales, sera l'expression donnée par Boussinesq, corrigée pour tenir compte du sillage ; son second terme, dû à la turbulence, sera encore de la forme : $\frac{h}{2} c_p V$, le coefficient h pouvant dépendre non seulement de la rugosité de la paroi, de la nature du fluide, de l'inclinaison des tubes et du sens du courant fluide, mais encore de l'écartement des tubes, de leur diamètre, de la forme géométrique du faisceau, et de la rangée de tubes considérée. Les expériences faites jusqu'à ce jour sont trop peu précises pour donner même une valeur grossière du coefficient h .

Mais on devra poser d'après (107), en vue de l'interprétation de nouveaux essais sur des tubes circulaires :

$$(146) \quad \alpha = \frac{4\beta}{\pi D} \sqrt{\frac{K c_p V (\xi_1 - \xi_0)}{\pi}} + \frac{h}{2} c_p V.$$

V étant la vitesse normale avant les tubes, $V (\xi_1 - \xi_0)$ la variation du potentiel de vitesses sur la surface d'échange et β , un coefficient supérieur à l'unité, et destiné à tenir compte de l'influence du sillage.

Plus généralement encore, une formule tout à fait analogue à la formule (146) pourra être utilisée pour le cas de l'étude des échanges de chaleur d'un corps solide quelconque plongé au sein d'un courant fluide ; son premier terme sera toujours la valeur de α trouvée dans la résolution du problème théorique simple, multipliée par un coefficient β supérieur à l'unité ; son second terme aura encore la forme : $\frac{h}{2} c_p V$.

CHAPITRE VIII.

CONCLUSION.

L'étude approfondie de la théorie et des expériences nous a montré la position actuelle des quatre problèmes principaux :

1° Le problème dit du refroidissement (ou de l'échauffement) au sujet duquel la théorie ne peut fournir que des indications d'homogénéité et qui a été l'objet d'expériences peu précises et seulement dans des cas particuliers;

2° Le problème des condenseurs, traité théoriquement par Nüsselt et Parr, qui ont donné des formules intéressantes, mais auxquelles manque la sanction des expériences;

3° Le problème du corps plongé dans un courant fluide, traité théoriquement de façon complète dans le cas du mouvement à potentiel de vitesses, et qui a fait dans le cas du mouvement turbulent l'objet d'un nombre très restreint d'essais sur des tubes de chaudières, en dépit de son intérêt pratique considérable. Nous avons vu que la formule (146) doit être susceptible d'en fournir la solution, pour le cas particulier du faisceau tubulaire;

4° Le problème du courant fluide dans un tube rectiligne circulaire, étudié expérimentalement par de nombreux auteurs avec une précision intéressante, sans qu'ils soient arrivés cependant à donner pour le coefficient de convection une formule ayant une portée suffisante. Nous avons tenté de combler cette lacune, d'une part en trai-

tant complètement des problèmes théoriques résolubles en régime tranquille, et d'autre part, grâce à des considérations théoriques sur la turbulence, en résolvant une équation approchée du problème général et en parvenant aux formules (140) et à la formule binôme (143); cette dernière a été reconnue capable d'expliquer tous les résultats d'expérience, au moyen d'un seul paramètre indéterminé. L'expression de ce paramètre h est encore inconnue, mais dépend certainement de la nature du fluide, de la rugosité de la paroi, de la turbulence à l'amont, du diamètre et de l'inclinaison du tube, et du sens (ascendant ou descendant) du courant fluide, quoiqu'il ne varie que dans des limites très restreintes.

Il n'en reste pas moins beaucoup à faire encore pour parvenir à une connaissance complète des lois des échanges de chaleur.

Par ailleurs, il y a des modes d'échange de chaleur entre fluide et paroi, que nous n'avons pas envisagés, par exemple le réfrigérant à pluie d'eau tombant sur des tubes (que Nusselt a expérimenté) et qui fait intervenir un phénomène d'évaporation; les pertes de chaleur de la vapeur qui travaille dans un cylindre ou dans une turbine; la transmission de chaleur dans une chaudière entre la tôle et l'eau en ébullition, etc... (En réalité l'intérêt pratique de ce dernier cas est tout à fait restreint, en raison de la très grande valeur du coefficient de transmission).

Au sujet de la connaissance précise des constantes physiques des divers gaz et liquides usuels, et en particulier des valeurs de la conductibilité K , de la chaleur spécifique c et de la viscosité η en fonction de la température, il y a encore des progrès à faire.

La connaissance exacte des constantes physiques faciliterait une interprétation plus précise des mesures avec les formules théoriques.

Une étude expérimentale purement dynamique donnerait dans chaque cas et pour les divers fluides des indications très précieuses. Elle permettrait de mesurer la loi de variation de la pression et par suite de déterminer la constante k de la formule (134) pour chaque fluide ; le coefficient B de rugosité de la paroi ; l'intensité des tourbillonnements ; la loi de variation de la vitesse dans une section normale et les divers aspects des phénomènes de turbulence. On connaîtrait ainsi les variables dont dépend le coefficient h de la formule approchée.

Enfin, des mesures d'échanges de chaleur devront être faites systématiquement pour chacun des quatre problèmes envisagés et pour divers fluides, en faisant varier dans des limites étendues les différents facteurs donnés par les considérations d'homogénéité, les températures, la rugosité, etc... En se basant sur les considérations théoriques, on étudiera la valeur de la formule binôme, et des formules (140) et éventuellement les perfectionnements dont elles sont susceptibles, à la faveur de résultats suffisamment précis, afin de les rendre applicables aux faibles vitesses. L'étude théorique et expérimentale entreprise ci-dessus a montré en effet qu'aux faibles vitesses le problème était plus difficile à résoudre.

Pour le cas du courant dans un tube, nous avons déjà donné des indications. On évitera les coudes brusques et autres causes de remous importants trop voisins de l'origine du tube, et on cherchera à se rapprocher le plus possible des conditions initiales théoriques, si l'on désire obtenir des résultats parfaitement comparables entre eux.

Nous pensons que l'étude générale, théorique et comparative que nous avons esquissée, sera susceptible de rendre des services aux expérimentateurs, et que l'exposé d'ensemble ainsi fait permettra au lecteur de bien apprécier la complexité du problème posé et la valeur des solutions approximatives. Quoi d'étonnant, d'ailleurs, à ce

que la question ne soit pas encore au point, puisque ce problème est plus difficile et plus complexe encore que celui de la résistance de l'air ? Nous avons vu en effet qu'il n'y a pas plus de coefficient spécifique de convection que de loi simple de la résistance de l'air rapportée à l'unité de surface, et que chaque cas particulier doit, pour l'un comme pour l'autre des deux problèmes, être considéré dans son ensemble.

Par ailleurs, l'utilité pratique incontestable de la résolution du problème de transmission de chaleur ne réside pas surtout dans la connaissance plus exacte *a priori* des quantités de chaleur échangées, mais plutôt dans celle de l'influence de certains facteurs restés jusqu'ici un peu dans l'ombre, comme les dimensions et la force géométrique, la rugosité de la paroi, la variation de la température sur la surface d'échange, la courbure et l'orientation des tubes par rapport à la direction du flux gazeux, le choix des intervalles entre ces tubes, l'emploi d'ailettes, de coudes brusques, etc..., tous facteurs fort intéressants quand on veut augmenter autant que possible l'activité des échanges de chaleur.

Juin 1927.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	1

CHAPITRE I.

IMPORTANCE PRATIQUE DE LA CONNAISSANCE DES LOIS DE LA TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONVECTION.....	2
--	---

CHAPITRE II.

HISTORIQUE DES RECHERCHES EFFECTUÉES JUSQU'A CE JOUR.....	6
---	---

CHAPITRE III.

POSITION THÉORIQUE DU PROBLÈME.....	17
-------------------------------------	----

CHAPITRE IV.

LES FORMULES BASÉES SUR L'HOMOGENÉITÉ.

1° Invariants géométriques.....	27
2° Invariants dynamiques.....	27
3° L'invariant de l'équation de la chaleur.....	30
4° Application au coefficient de convection d'un fluide en mouve- ment à l'intérieur d'un tube circulaire rectiligne.....	34
5° Cas du problème du refroidissement.....	33

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION THÉORIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES SIMPLES.

1. Le problème de Boussinesq.....	37
1° Le problème simple du demi-plateau mince indéfini..	38
2° Extension des résultats précédents au cas du problème à deux dimensions.....	41
3° Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un corps de révolution ayant son axe Ox orienté suivant le courant	46
4° Généralisation au cas d'un corps convexe quelconque.	52

	Pages
5° Cas du courant fluide oblique par rapport aux génératrices d'un cylindre.....	53
II. — Le problème de l'échange de chaleur à l'intérieur d'un tube cylindrique	56
1° Problème du double plateau	56
2° Problème du tube cylindrique circulaire avec vitesse uniforme dans la section.....	66
3° Problème du tube cylindrique circulaire avec fluide visqueux en mouvement tranquille.....	76
4° Solution approximative des trois problèmes précédents dans le cas où la température de la paroi n'est pas uniforme.....	90
5° Extension des résultats ci-dessus quand il existe un potentiel de vitesses.....	96
A) Le problème plan	96
B) Le problème de révolution.....	97
C) Le tube de forme quelconque.....	99

CHAPITRE VI.

EXAMEN ET INTERPRÉTATION DES PRINCIPAUX TRAVAUX SUR
LA TRANSMISSION DE CHALEUR PAR CONVECTION.

1° Le problème du refroidissement dans un fluide au repos (Dulong et Petit, Péclelet, Boussinesq, Kennelly, Wright et Bylevelt, Langmuir, Bylevelt, Wamsler, Groeber, Petavel, Davis, Nüsselt)....	100
2° Le problème du corps plongé dans un courant fluide (Rietschel, Thoma).....	108
Considérations approchées sur le calcul du coefficient α ..	111
A) Le régime à sillage fermé	111
B) Le régime à potentiel de vitesses non uniforme (Joukowski).....	114
Les essais de M. V. Kammerer.....	117
3° Le problème expérimental du courant gazeux à l'intérieur d'un tube	124
A) Ser	124
B) Nicholson.....	127
C) Josse.....	128
D) Jordan, Leprince-Ringuet.....	129
E) Nüsselt.....	133
F) Rietschel et Holmboe.....	140
G) Groeber.....	141
H) Poensgen.....	142
Comparaison des diverses expériences ci-dessus.....	143

4° Les coefficients de convection des liquides dans un tube (Stanton-Soennecken).....	147
5° Le problème du condenseur par surface (Nüsselt-Parr).....	149

CHAPITRE VII.

**ESSAI D'UNE THÉORIE DE LA CONVECTION DANS UN TUBE
AVEC MOUVEMENT TURBULENT.**

Le tube cylindrique quelconque.....	158
Caractères d'un mouvement turbulent permanent et uniforme...	161
Convection dans un tube circulaire avec mouvement turbulent..	163
Critique de la formule binôme (143) à laquelle nous sommes parvenu.....	172
Remarque (généralisation)...	182

CHAPITRE VIII.

CONCLUSION.

183

BIBLIOGRAPHIE.

- J. BOUSSINESQ. — *Essai sur la théorie des eaux courantes* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences ; t. XXIII, n° 1, p. 1-680 ; 1877 ; — t. XXIV n° 2, p. 1-64 ; 1878 ; — t. IV, p. 335-376 ; 1878).
- Id. — *Théorie analytique de la chaleur*, t. II ; 1903, (Gauthier-Villars).
- Id. — *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences*, t. III ; 1921.
- BYLEVELT. — *Die künstliche Konvektion am elektrischen Hitzdrahte* (Diss. Dresden. 1915).
- CARCANAGUES. — *Recherches expérimentales sur l'échauffement de l'air parcourant un tuyau maintenu extérieurement à une température déterminée* (Annales des Mines, 9^e série, t. IX ; 1896).
- A.-H. DAVIS. — *Philosophical Magazine* :
- 1° Convection of Heat and Similitude (t. XL, p. 692 ; 1922) ;
 - 2° The Heat loss by Convection from Wires in a Stream of air, and its relations to the mechanical résistance (t. XLI, p. 899 ; 1921) ;
 - 3° Natural Convective Cooling of Wires (t. XLIII, p. 329 ; 1922) ;
 - 4° Natural Convection Cooling in Fluids (t. XLIV, p. 924 ; 1922) ;
 - 5° Convective Cooling in Liquids. Some thermal conductivity Data (t. XLVII, p. 972 ; 1924) ;
 - 6° The cooling power of a stream of very viscous Liquid (t. XLIX, p. 285 ; 1925) (rectification) ;
- (Les articles de Davis contiennent les références sur Russell, Kennelly, Compan, Morris, King, Hughes, Ayrton et Kilgour, Pétavel, Goldschmidt et Rice).
- H. GROEBER. — *Der Wärmeübergang strömender Luft an Rohrwindungen* (Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ; Heft 130, 1912).
- Id. — *Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges* (J. Springer, Berlin, 1921).
- HENRY. — *Étude expérimentale de la vaporisation dans les chaudières de locomotives* (Annales des Mines, 9^e série, t. VI ; 1894).

- MAX JACOB. — *Die Wärmeleitfähigkeit von Wasser* (Phys. techn. Reichsanstalt, 1921).
- JORDAN. — *On the rate of heat transmission between fluids and metal surfaces* (Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1909).
- JOSSE. — *Versuche über Oberflächenkondensatoren, insbesondere Dampfturbinen* (Zeitschrift d. V. d. I., p. 322; 1909).
- N. JOUKOWSKI. — *Aérodynamique* (Cours professé à l'école Impériale technique de Moscou, 1916; Gauthier-Villars).
- V. KAMMERER. — *Considérations sur la transmission de la chaleur dans les générateurs de vapeur, déduites d'essais de vaporisation* (Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse, novembre 1920).
- KENNELLY, WRIGHT and BYLEVELT. — *The convection of heat from small copper wires* (Trans. Amer. Inst. Elect. Engin., p. 363; 28 january 1909).
- LANGMUIR. — *Convection and conduction of heat in gases* (Physical Review, 34, p. 402; 1912).
- F. LEPRINCE RINGUET. — *Etude sur la transmission de la chaleur entre un fluide en mouvement et une surface métallique* (Revue de Mécanique; 1911).
- NICHOLSON. — *Heat Transmission in Steam Boilers* (Engineering, p. 193 et 229; février 1909).
- W. NÜSSELT. — *Du Wärmeleitfähigkeit von Wärmeisolistoffen* (Diss. München, 1907; et : Mitt. über Forsch.-Arb., cahiers 63 et 64).
- Id. — *Der Wärmeübergang in Rohrleitungen* (Habilitationsschrift, Dresden, 1909, et : Mitt. über Forsch. Arb., cahier 89).
- Id. — *Die abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge* (Zeitschrift d. V. d. I., p. 1131; 1910).
- Id. — Réponse à une objection de Binder (Z. d. V. d. I., p. 197; 1913).
- Id. — *Grundgesetz des Wärmeüberganges* (Gesundh. Ingen. p. 477; 1913).
- Id. — *Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes* (Z. d. V. d. I., p. 54 et 569; 1916).
- Id. — *Der Wärmeübergang im Rohr* (Z. d. V. d. I., p. 683; 1917).
- Id. — *Die Kühlung einer ebener Wand durch einen Luftstrom* (Gesundheits Ingenieur, cahier 52; 1922).
- Id. — *Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschine* (Forsch. Arb. cahier 264; 1923).
- Id. — *Der Wärmeaustausch an Berieselungskühler* (Z. d. V. d. I., cahier 9; 1923).

- W. NÜSSELT. — *Die abhängigkeit des Wärmeüberganges von der Geschwindigkeit* (Stahl and Eisen, cahier 14; 1923.)
- Id. — *Die Wärmeübertragung im Rohr* (Festschrift zur Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe, 1925).
- Id. — *Die Gasstrahlung bei der Strömung im Rohr* (Z. d. V.d. I, p. 763; 1926).
- PARR. — « *The Engineer* », n° 131; p. 559; 1921.
- POENSGEN. — *Über die Wärmeübertragung von strömenden überhitztem Wasserdampf an Rohrwandungen, und von Heizgasen an Wasserdampf* (Z. d. V. d. I, p. 27; 1916).
- L. PRANDTL. — *Abriss der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung* (Sonderdr. a. d. Handwörterbuch der Naturwissenschaft. Bd4; Fischer, Iena).
- O. REYNOLDS. — *Extent and action of the heating surface of steam boilers; Effect of velocity of gases on the rate of heat transmission* (Literary and Philosophical Society of Manchester, 1874-1875).
- Id. — *On the Motion of Watt and on the Law of resistance in parallel Channels* (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1883).
- RIETSCHEL. — *Untersuchungen über Wärmeabgabe, Druckhöhenverlust und Oberflächentemperatur bei Heizkörpern und Anwendung grosser Luftgeschwindigkeiten* (Mitteilung der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, cahier 3, Techn. Hochschule, Berlin, 1910).
- SER. — *Traité de Physique Industrielle* (t. I; 1888, G. Masson, éditeur).
- SOENNECKEN. — *Der Wärmeübergang von Rohrwänden an strömendes Wasser* (Thèse, et Diss. München, 1910).
- STANTON. — *On the passage of Heat between metal surfaces and liquids in contact with them* (Philos. Trans. of the Royal Society, 1897).
- THOMA. — *Hochleistungskessel*, 1921.
- F. WAMSLER. — *Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft* (Mitteilungen über Forsch. Arb; cahiers 98 et 99; 1911).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Sur les progrès récents de la Balistique extérieure.

Vu et approuvé :

Paris, le 22 décembre 1927.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
S. CHARLÉTY.

